

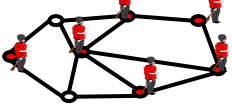



# グラフのEternal Vertex Coverに関する研究

氏名 井上翔太 (指導教員 藤戸敏弘)

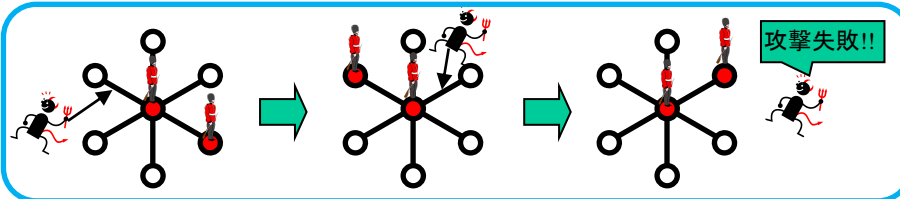
## 1. Eternal Vertex Cover問題

頂点被覆問題から派生したゲーム問題としてEternal Vertex Cover問題がある[Fominら、2009]。この問題のゲームの準備として入力グラフが与えられ、グラフ上に幾人かの守衛を配置する。ゲームとして、グラフの辺上に発生する任意の攻撃から守衛を使ってグラフを常に守ることである。問題としてグラフに配置する守衛数を最小化することである。

<ul style="list-style-type: none"> <li>•ゲームはラウンド制で進行する。</li> <li>•何名かの守衛はグラフの頂点上に配置される。</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>•各ラウンドでの守衛と攻撃者の制約事項</li> </ul> <p>現在配置されている頂点に留まるか、隣接する頂点へ移動できる。 任意の一つの辺を攻撃できる。</p> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>•ゲームの判定</li> </ul> <p>攻撃される辺を守衛が一人でも通過することができればグラフを守れる。 そうでなければグラフの防御に守衛は失敗し、ゲームは終了する。</p>
--	--	---

ゲーム例

守衛数2



任意の攻撃から常にグラフを守れる!

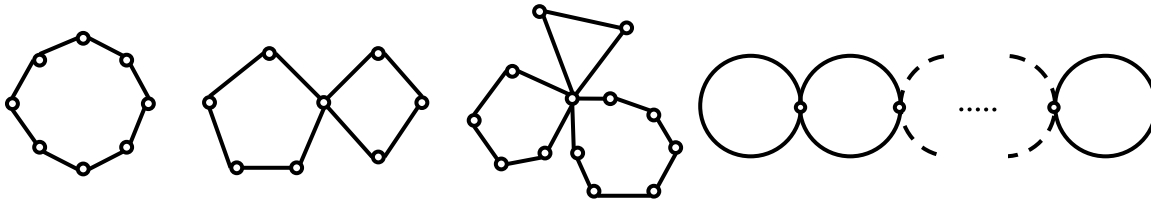
## 2. グラフが木の場合におけるEternal Vertex Cover数

Eternal Vertex Cover問題は一般的にNP困難問題である。NP困難問題は多項式時間で最適解を求めることが非常に難しいと考えられている。しかし、上図のゲーム例のように、グラフを木に制限すると、Eternal Vertex Cover問題は多項式時間で最適解を求めることができ、その数は内点数+1となることが分かっている[Fominら、2009]。

そのため、本研究ではグラフが木以外の場合での、グラフを常に守ることができる最適な守衛数を考える。

## 3. 提案したグラフでの最小Eternal Vertex Cover数

### 3.1 カクタスグラフの最小Eternal Vertex Cover数

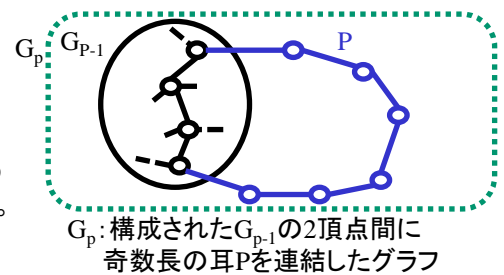


上に示した4種類のカクタス上での最小Eternal Vertex Cover数を導出した。

### 3.2 耳のみで構成されるグラフの最小Eternal Vertex Cover数

#### 3.2.1 グラフの構成手順

はじめに、耳をつなげるための最初のグラフは常に偶数閉路から始めることとする。次に、すでに構成済みのグラフ上の任意の2頂点間を選ぶ。なお、任意の2頂点間の道には少なくとも奇数長の道を含まないといけない。この2頂点間に奇数長の耳Pをつなげる。この様な手順で構成されるグラフを $G_p$ とし、右図に構成される $G_p$ の例を示す。



#### 3.2.2 最小Eternal Vertex Cover数

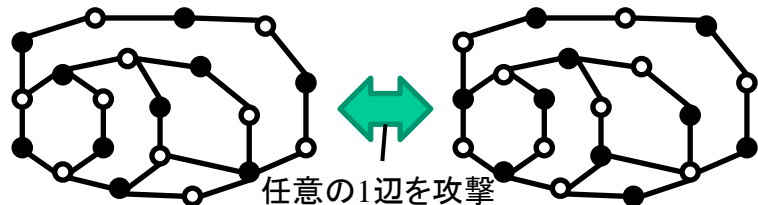
##### • $G_p$ の最小頂点被覆

最小頂点被覆数は $V(G_p)/2$ となる。なお、頂点被覆で被覆されている頂点を黒点し、被覆されていない頂点を白点した時、次の状態が成り立つ。黒点の隣接頂点は必ず白点であり、白点の隣接頂点は必ず黒点となる。

##### •最小頂点被覆による守衛の戦略

グラフ $G_p$ 上の任意の1辺を攻撃されても守衛の集合は、常にこのグラフを最小頂点被覆数 $V(G_p)/2$ 人の守衛で守ることができる。

⇒**数学的帰納法で証明した。**



3.2.1の手順で構成される $G_p$ の最小Eternal Vertex Cover数は $V(G_p)/2$ となる。

## 4. 今後の研究計画とスケジュール

- [今年度末までに] 研究結果をまとめる。なお、既存結果が無いかどうか調査する。
- [2011/3までに] 3.2.1の耳を追加する条件を変えた場合での最小Eternal Vertex Cover数を調査する。
- [2011/6までに] 他のグラフでの場合での最小Eternal Vertex Cover数を調査する。
- [2011/12までに] 一般のグラフで、近似的に何か言えないか調査し、証明を保証する。
- [2012/3までに] これまでの研究結果をまとめる。

技術を究め、技術を創る