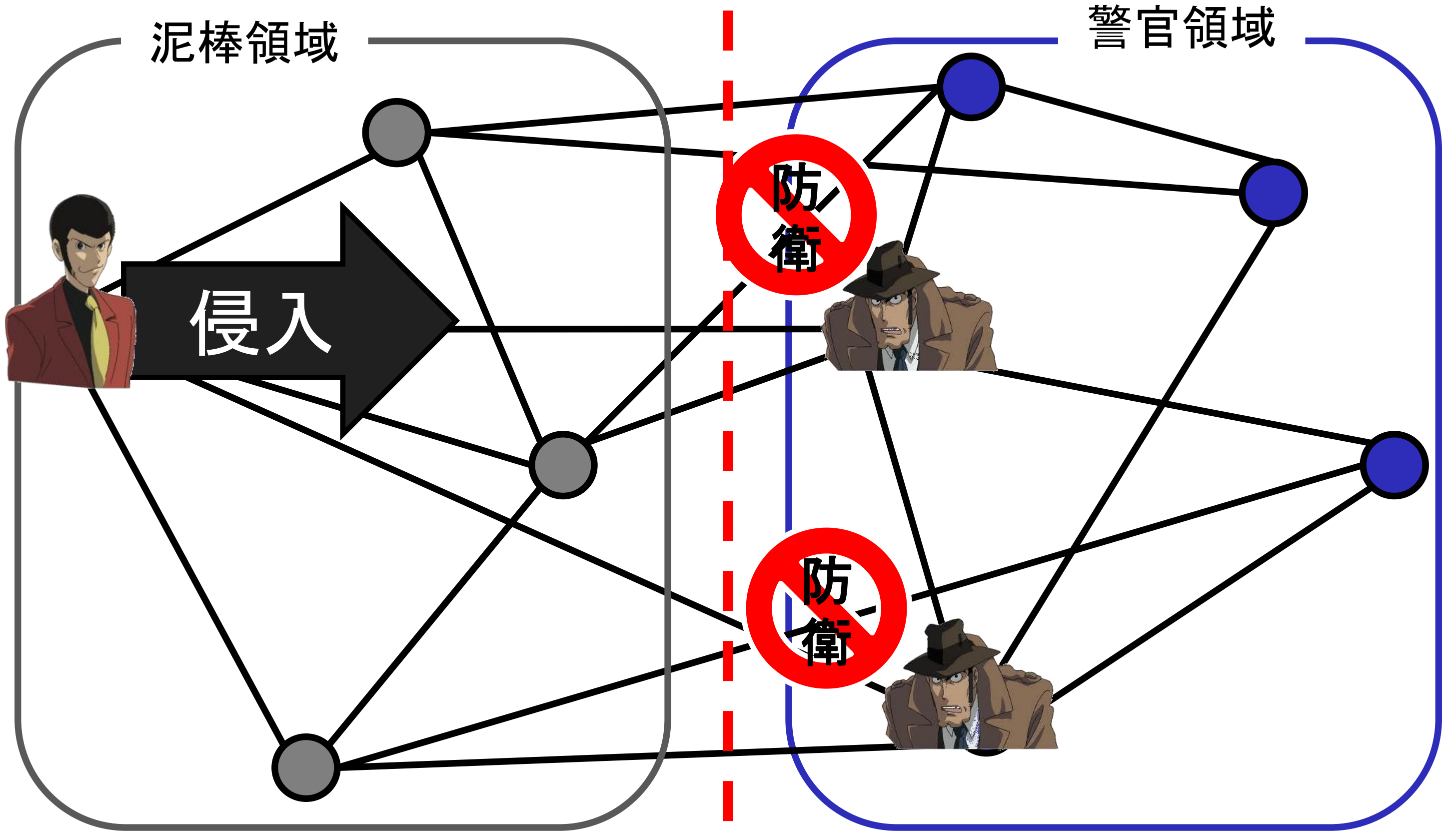
# 木状泥棒領域を持つ
# グラフ護衛問題の近似

豊橋技術科学大学
情報・知能工学専攻1年
離散最適化研究室
M093414 坂巻孝昌

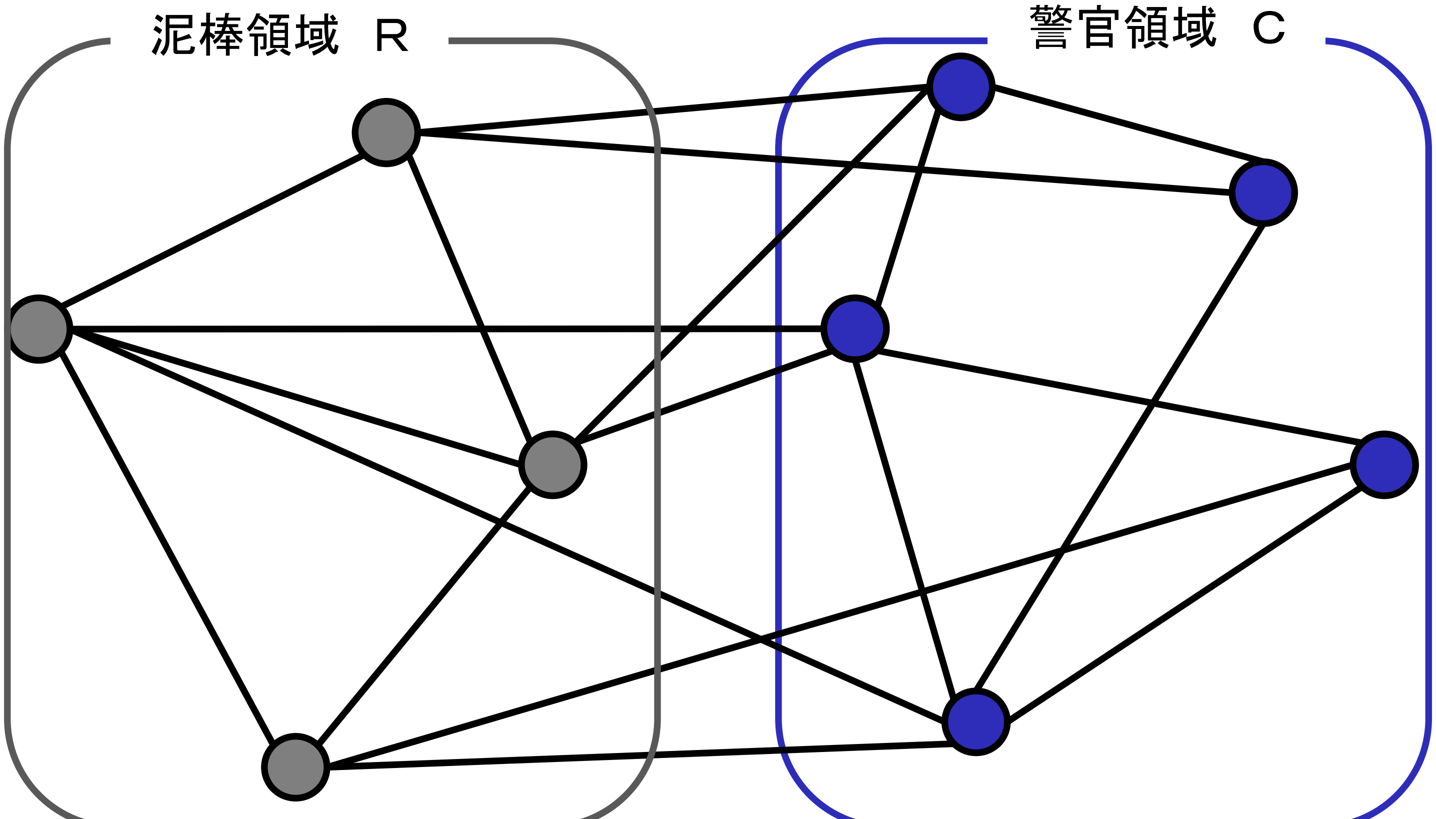
# 護衛ゲーム

- 泥棒は侵入を、警官は防衛を目指すグラフ護衛ゲーム



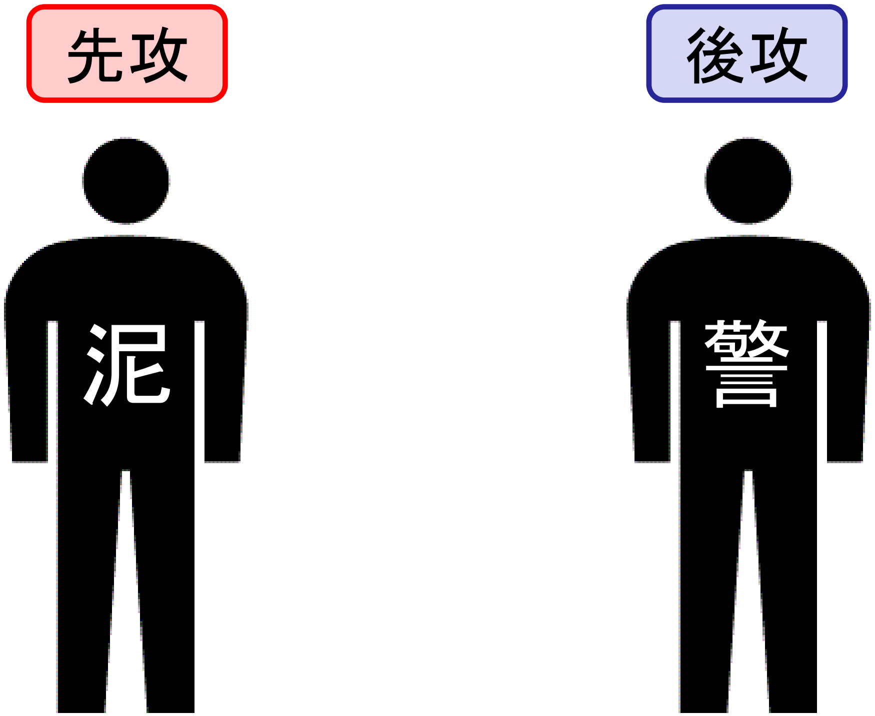
# 護衛ゲーム ルール

- 泥棒領域R、警官領域Cから成るVを頂点集合とするグラフG=(V,E)を与える



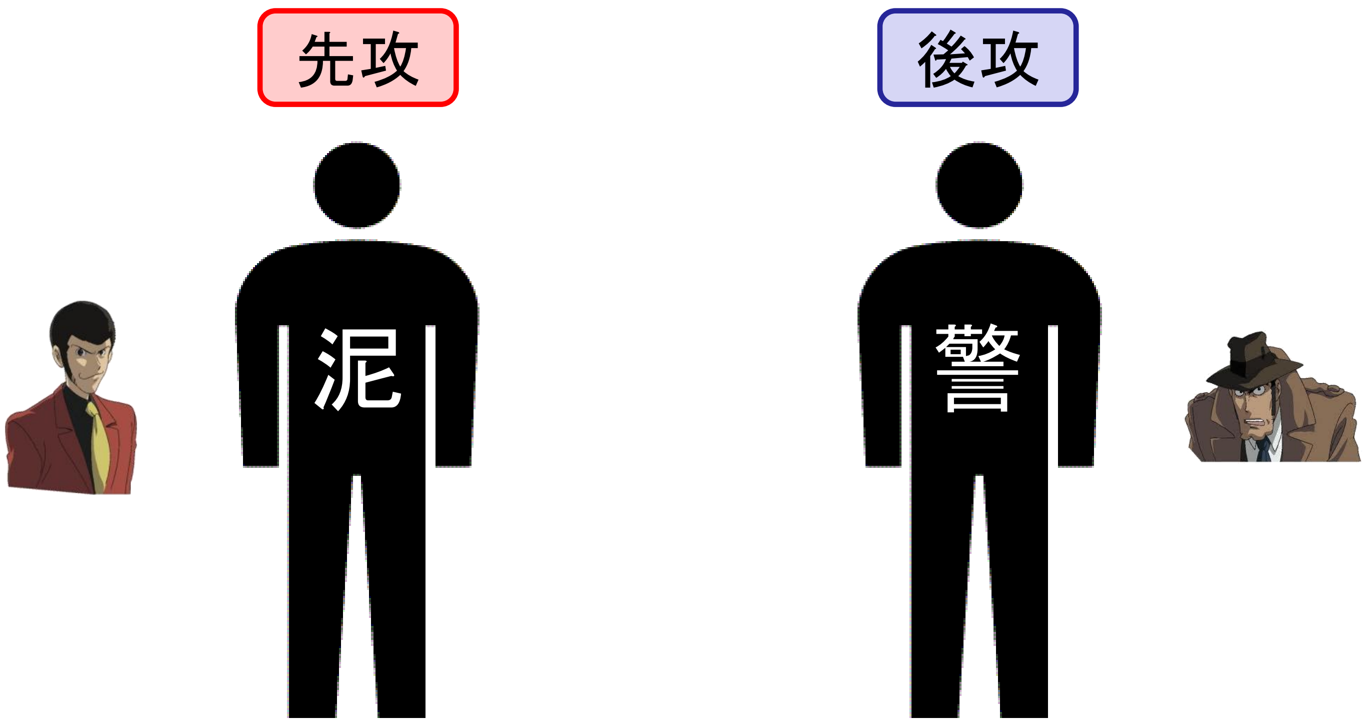
# 護衛ゲーム ルール

- 泥棒プレイヤーと警官プレイヤーの二人でプレイ
- 交互に泥棒/警官のターンを入れ替えるターン制



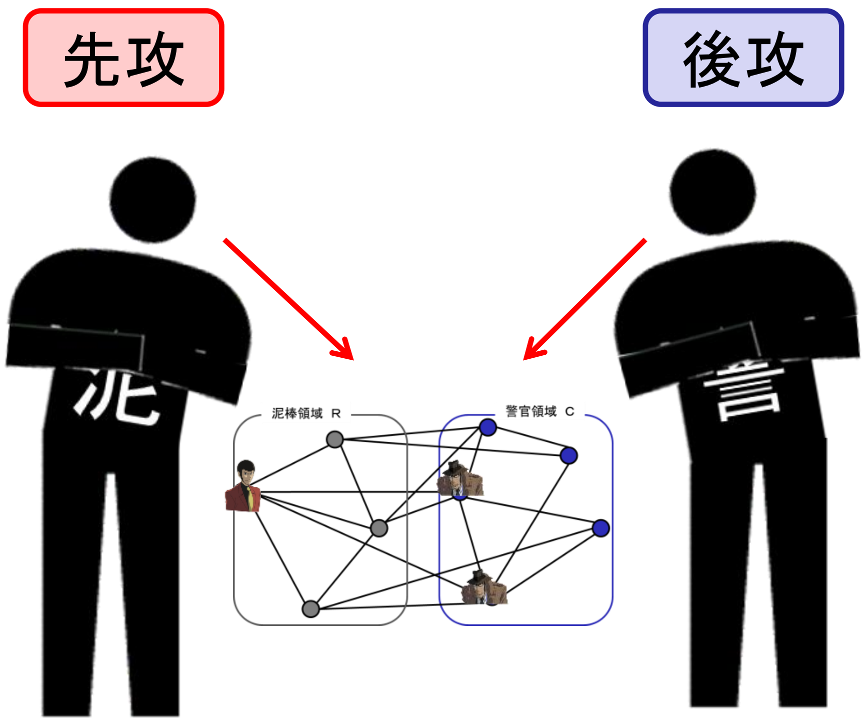
# 護衛ゲーム ルール

- 泥棒プレイヤーの持ち駒：泥棒 × 1
- 警官プレイヤーの持ち駒：警官 × α



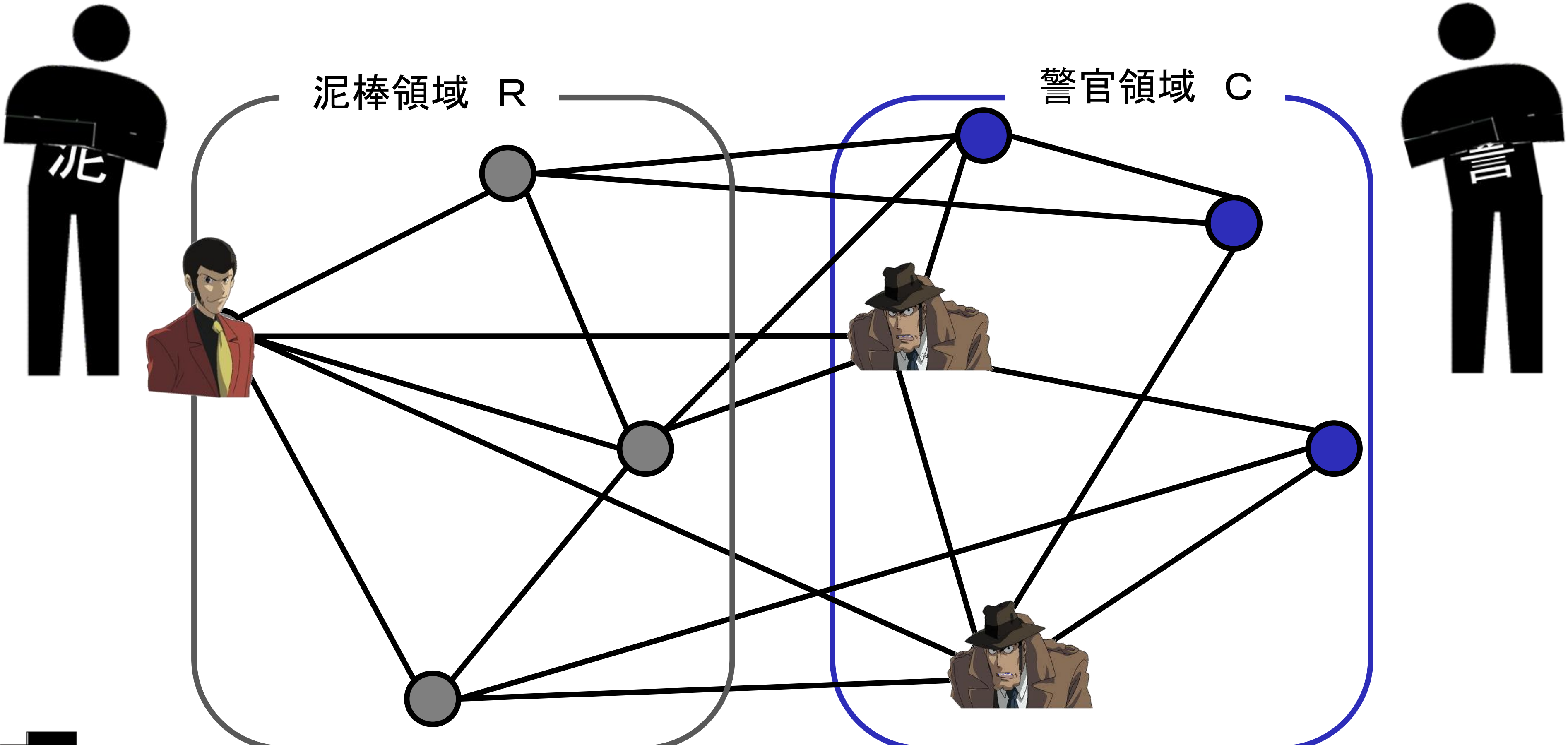
# 護衛ゲーム ルール

- 両プレイヤーはすべての駒の配置を常に把握している



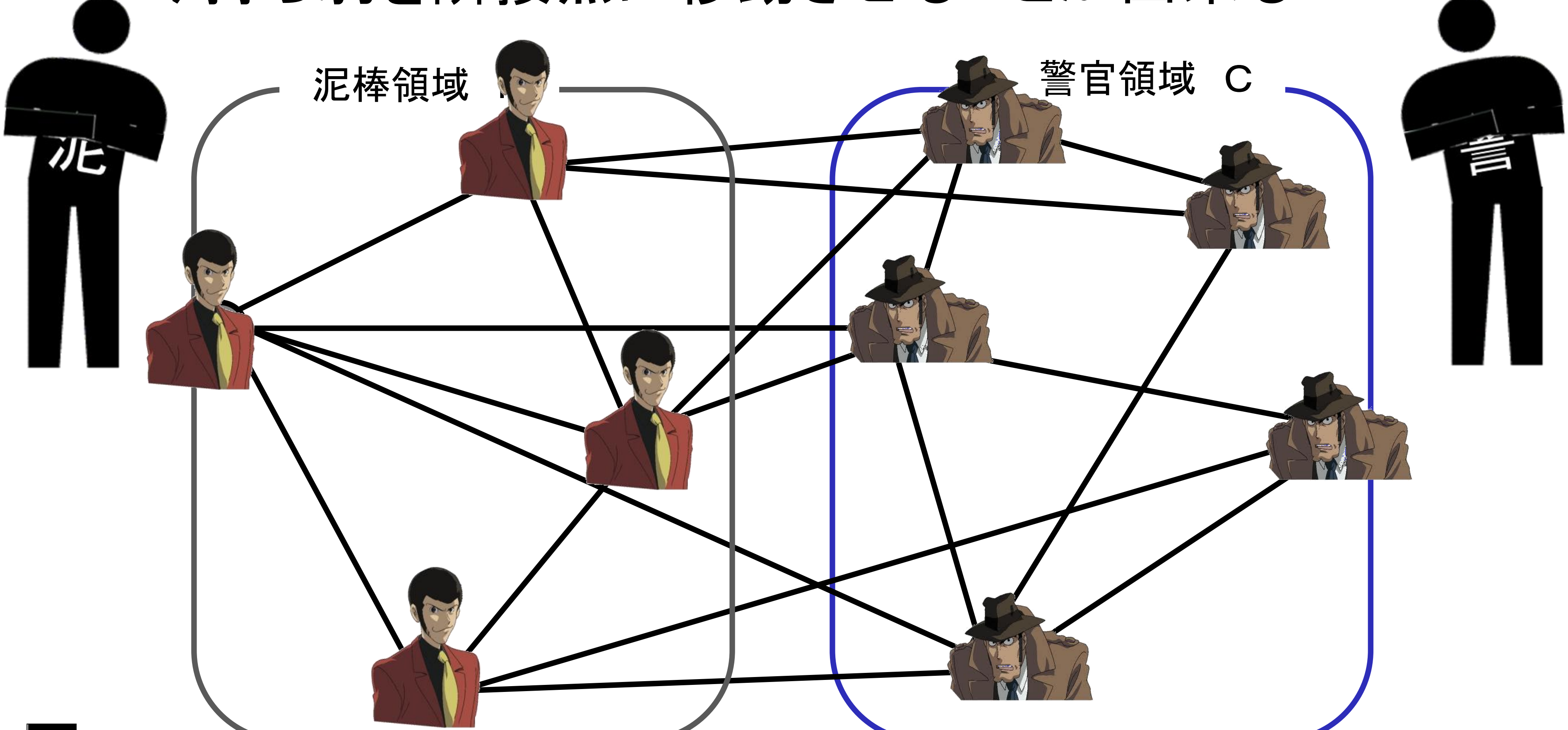
# 護衛ゲーム 始まり

- 泥棒プレイヤーが泥棒領域内のどれかの頂点に泥棒を置く
- 警官プレイヤーが複数体の警官を警官領域内の頂点に置く



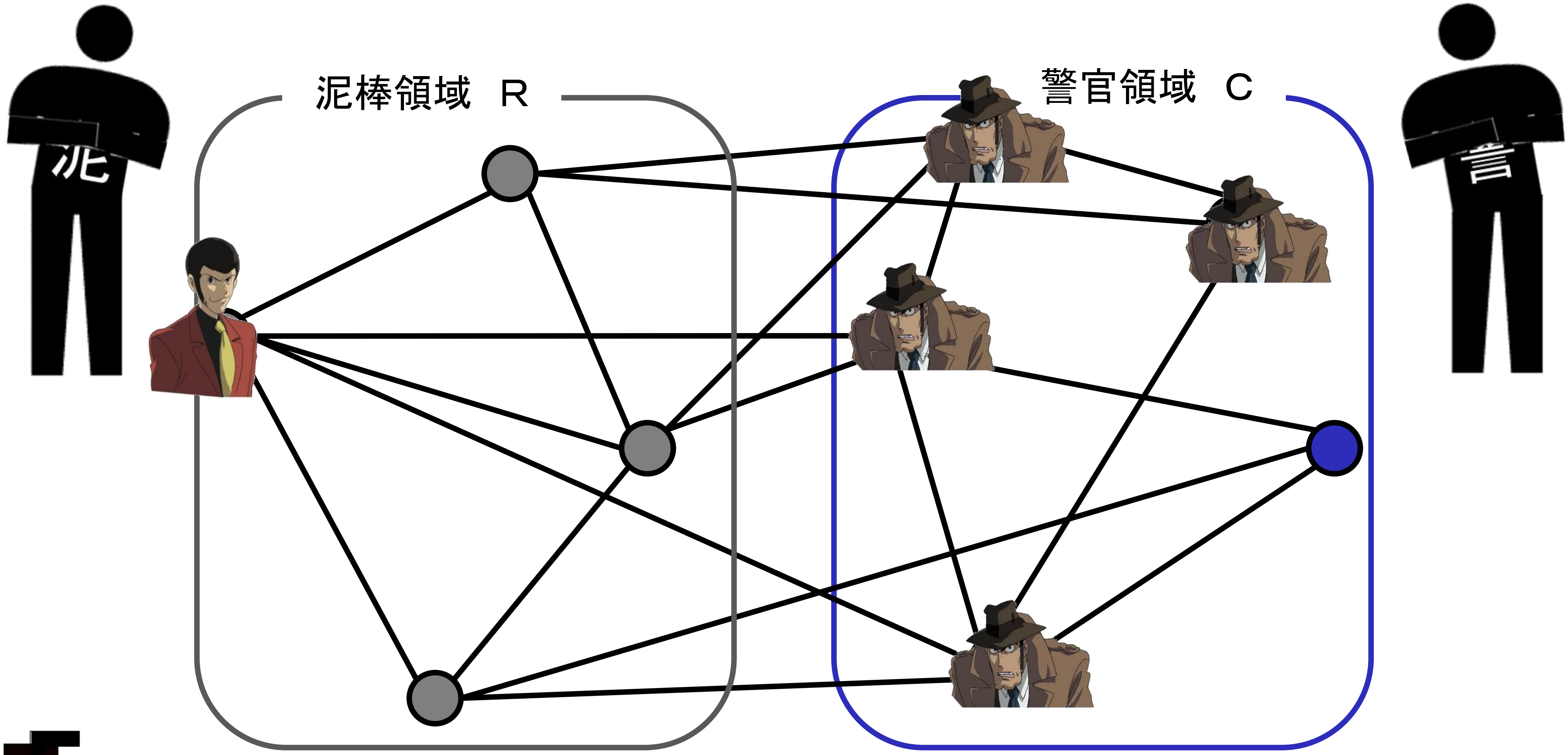
# 護衛ゲーム 中盤

- 各プレイヤーは自身のターン時に各駒につき1回だけ持ち駒を隣接点に移動させることが出来る



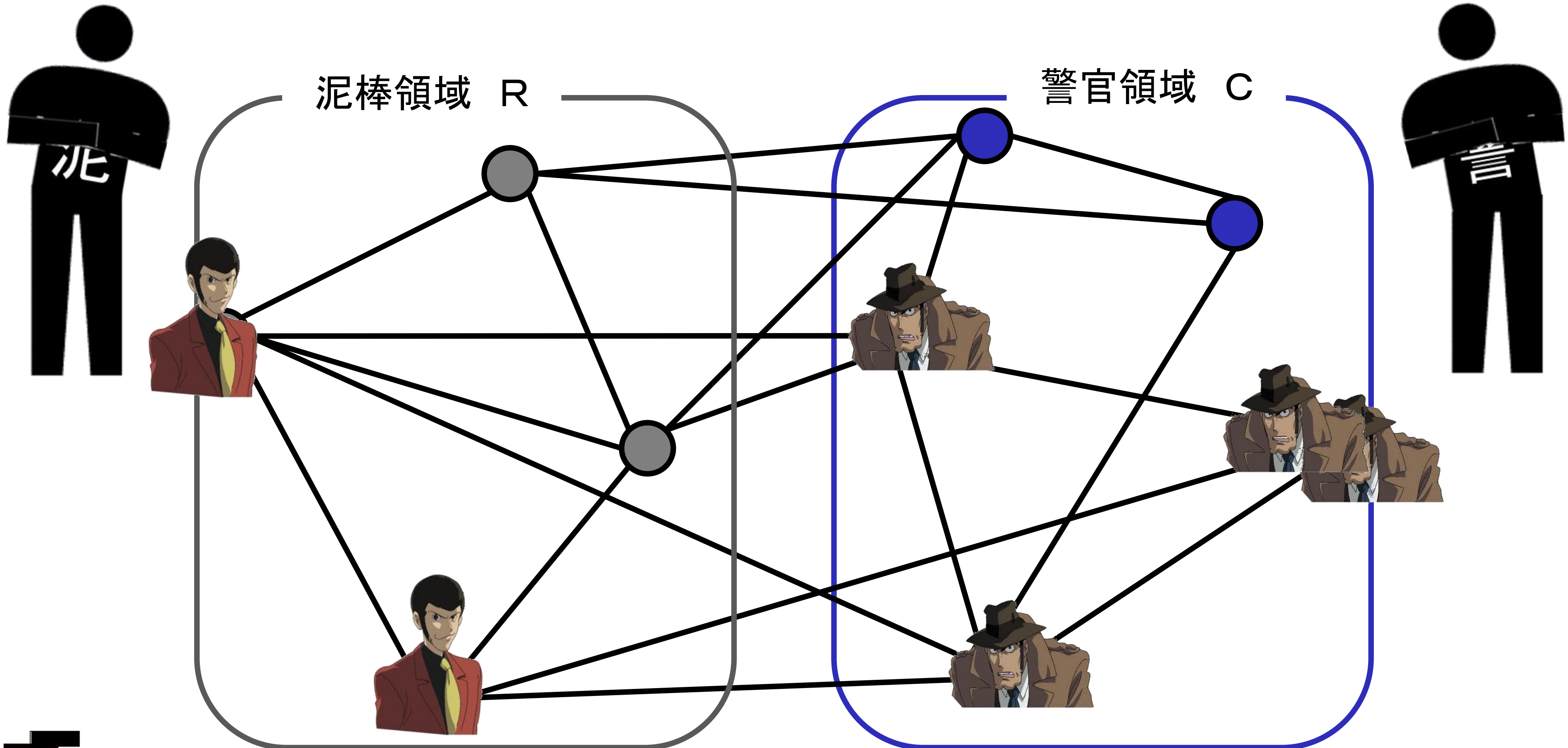
# 護衛ゲーム 中盤

- 現在の頂点に待機も可能



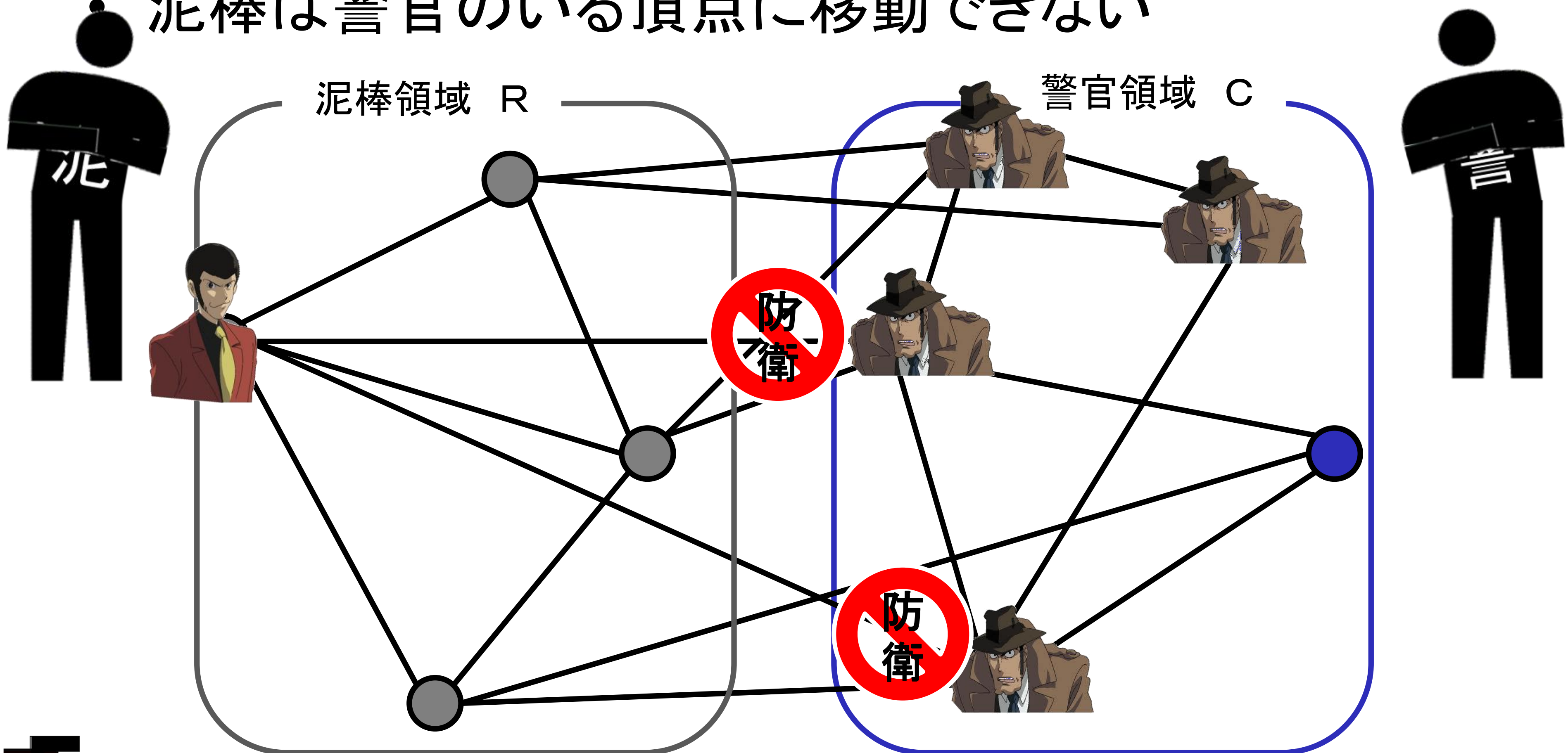
# 護衛ゲーム 中盤

- 警官は同じ頂点に置いても良い



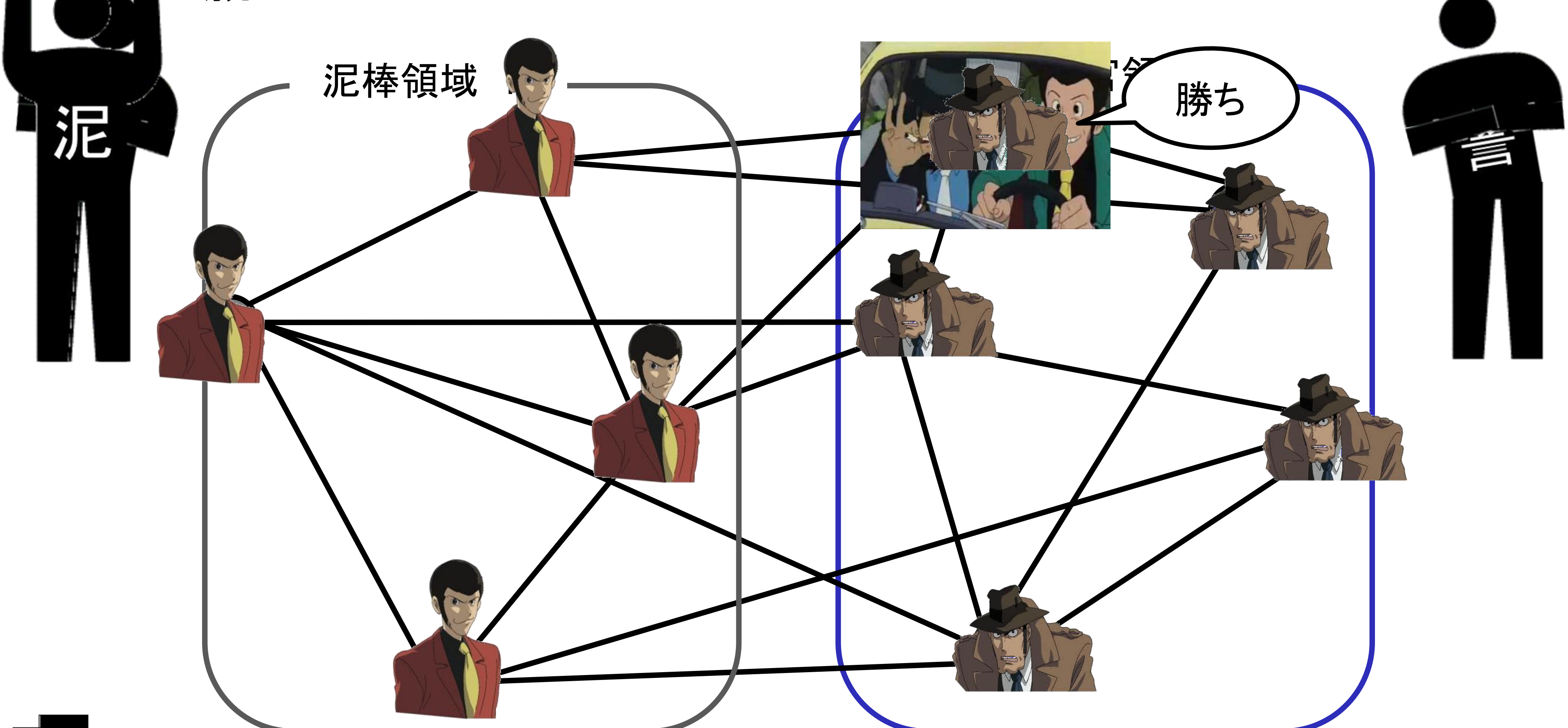
# 護衛ゲーム 中盤

- 警官は警官領域内でしか移動できない
- 泥棒は警官のいる頂点に移動できない



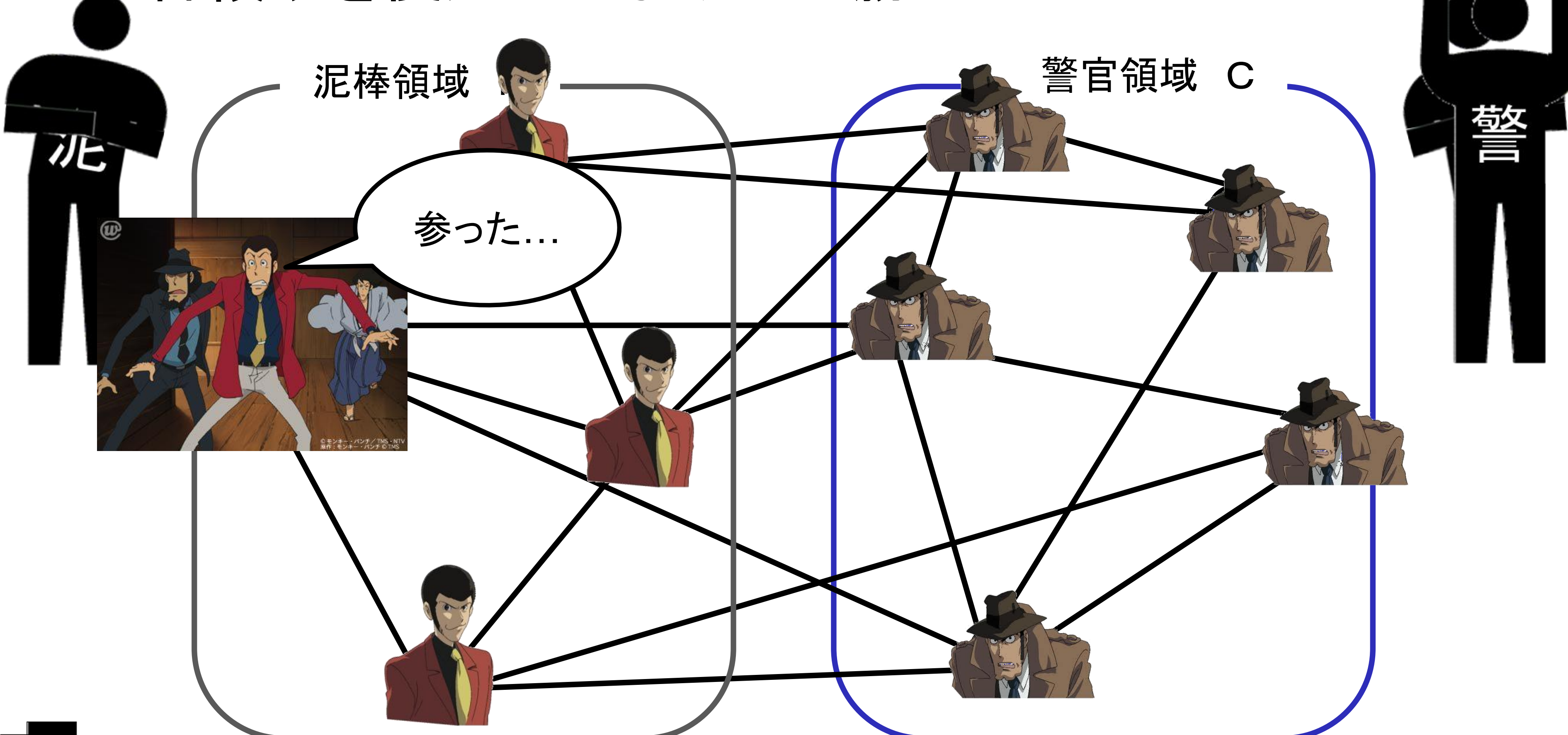
# 護衛ゲーム 終わり

- 泥棒プレイヤーは泥棒の駒が警官領域に侵入すると勝ち



# 護衛ゲーム 終わり

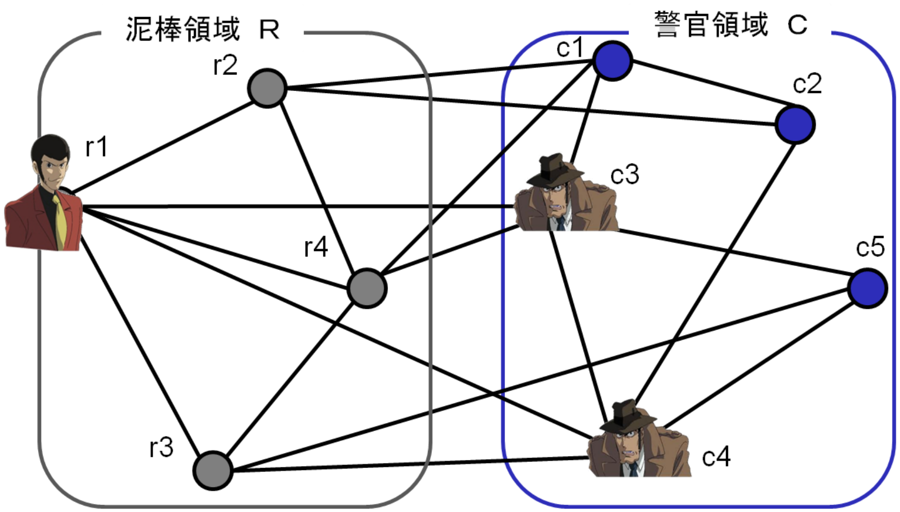
- 警官プレイヤーは何回ターンを交代しても泥棒が警官領域を侵入できなければ勝ち



# 状態の定義

## 定義:状態

G内にあるすべての駒の配置




**状態**

泥棒の状態

r1

警官の状態

c3

c4

# 戦略の定義

## 定義：泥棒(警官)の戦略

護衛問題において泥棒(警官)の戦略とは、現在の状態から1ターンで配置可能な泥棒(警官)の次の状態に写像する関数

**f：現在の状態→次の泥棒(警官)の状態**

# 勝利戦略の定義

定義：勝利戦略

相手側の警官(泥棒)プレイヤーがいかなる戦略を用いようとも、泥棒(警官)プレイヤーに勝利をもたらすことのできる戦略を勝利戦略という

# 護衛問題

## 問題

警官領域Cと泥棒領域Rから成るVを頂点集合とする任意のグラフが与えられ、そのグラフにおいて警官の勝利戦略が存在する中で最小の警官の数を求める問題

# 護衛問題　定式化

問題：護衛問題

入力：　任意のグラフG=(V,E)
警官領域C（⊂V）

出力：　警官の人数 nc

実行可能解：勝利戦略が存在するような
警官の人数nc

目的：　ncを最小にする

# 護衛問題　研究背景

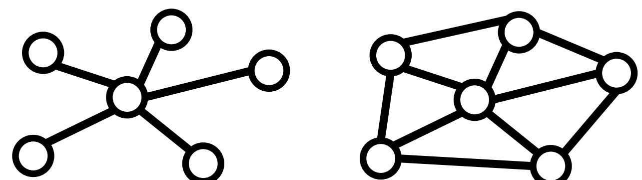
Fominの研究(2008)

- Rがパスを誘導するとき、最小コストフローに帰着することにより多項式時間で解くことができる。
- Rがサイクルを誘導するとき、多項式時間で最適値の2倍以内で解くことができる。
- Rが木を誘導するとき、NP困難であり、判定版はNPに属し、パラメータ付き版はW[2]困難である。さらに、集合被覆問題を近似性を保ちながら還元させることができるため、(NP⊆DTIME($n^{\text{polylog } n}$)でない限り)多項式時間近似保証は$\Omega(\log n)$である 。
- Gが有向グラフでRが有向acyclicグラフのとき、PSPECE完全である。

# 護衛問題　研究背景

## Reddyの研究(2009)

- Rが任意のグラフのとき、判定版はPSPACE困難である。
- Rがwheelグラフを誘導するとき、判定版はNP困難である。
- Rが星グラフ、完全グラフ、wheelグラフを誘導するとき、護衛問題はそれぞれH(|R|)倍、2H(|R|)倍、H(|R|)+3/2倍で近似できる。(H(k)=1+1/2+1/3+…+1/k)

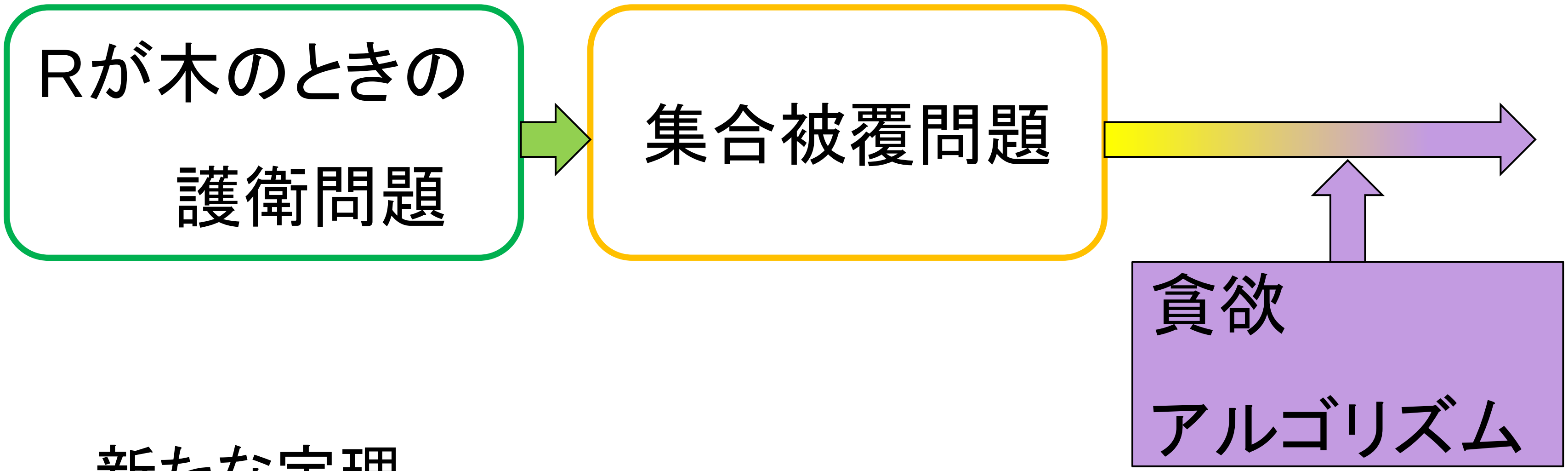


星グラフ　*wheel* グラフ

## 永持の研究(2011)

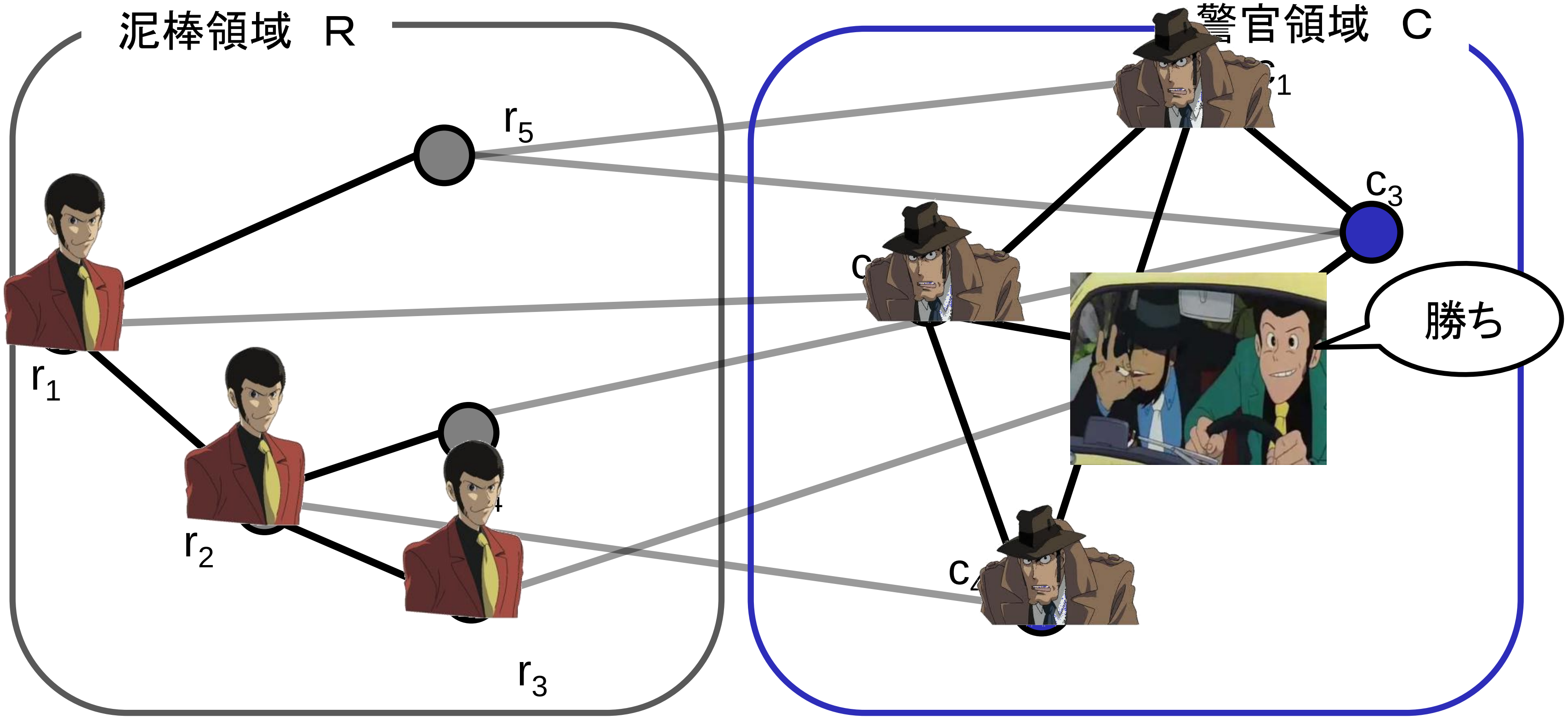
- Fominの論文では未解決だったRがサイクルを誘導するときの多項式時間解法の肯定的解決を示した。

# 研究結果



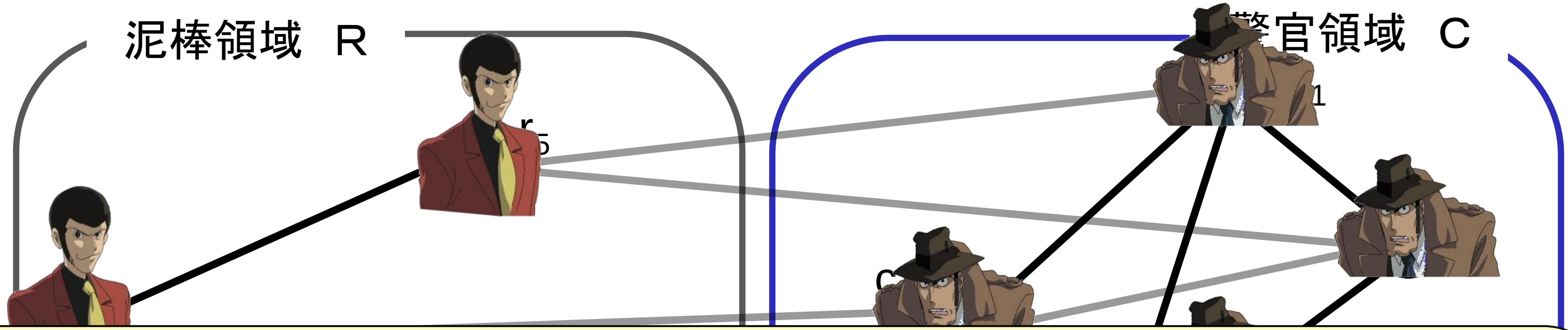

新たな定理

- Rが木を誘導するとき、護衛問題はH(|R|)倍で近似できる。(H(k)=1+1/2+1/3+…+1/k)




## 定義：直接戦略(泥棒の戦略)

Rが木のとき、泥棒が根を初期位置とし,根から任意の葉に一方向にのみ移動し,その道中で可能であれば警官領域に侵入するという泥棒の戦略を直接戦略(direct strategy)という

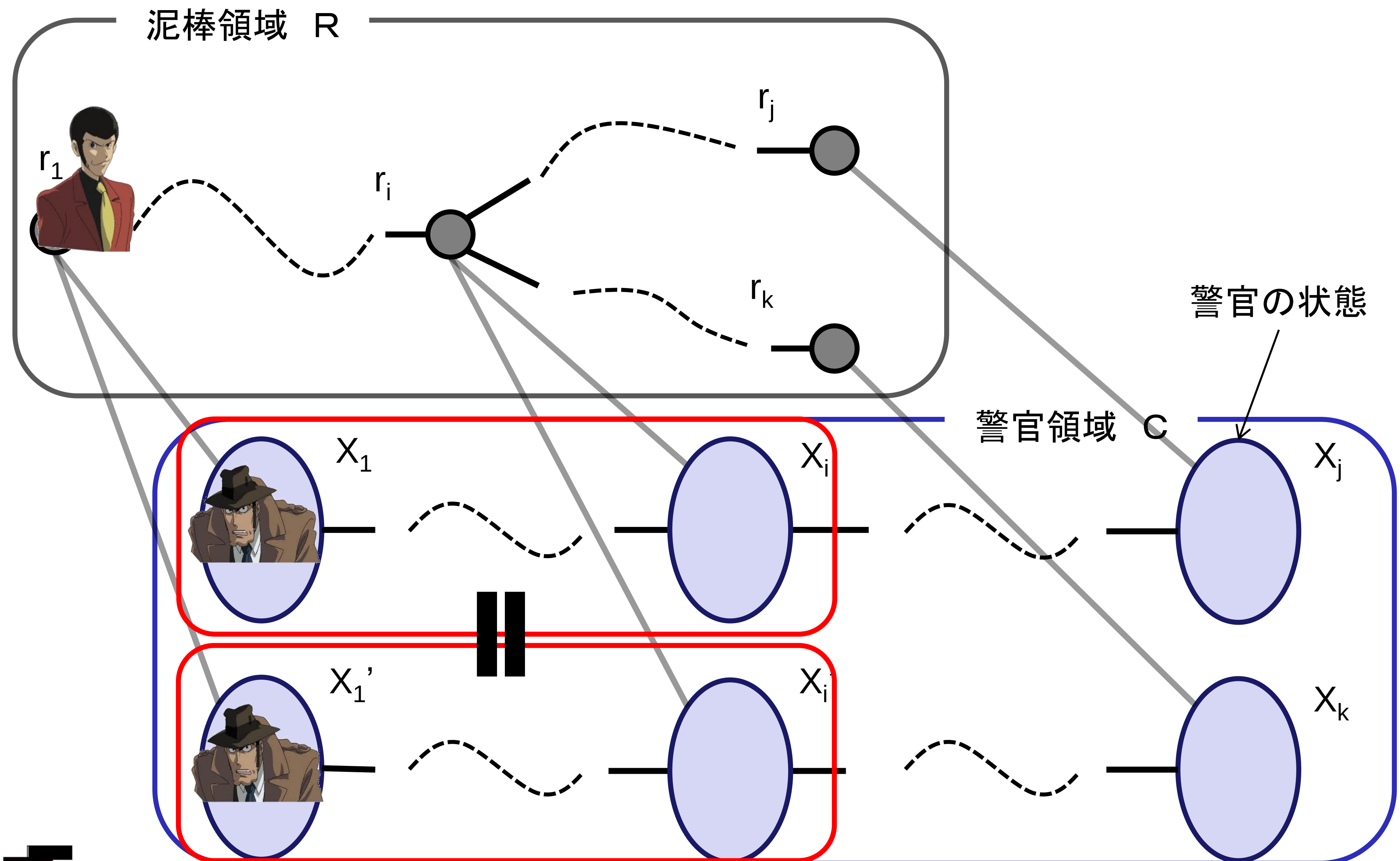



**点戦略　Pf:現在の泥棒の状態→次の警官の状態**

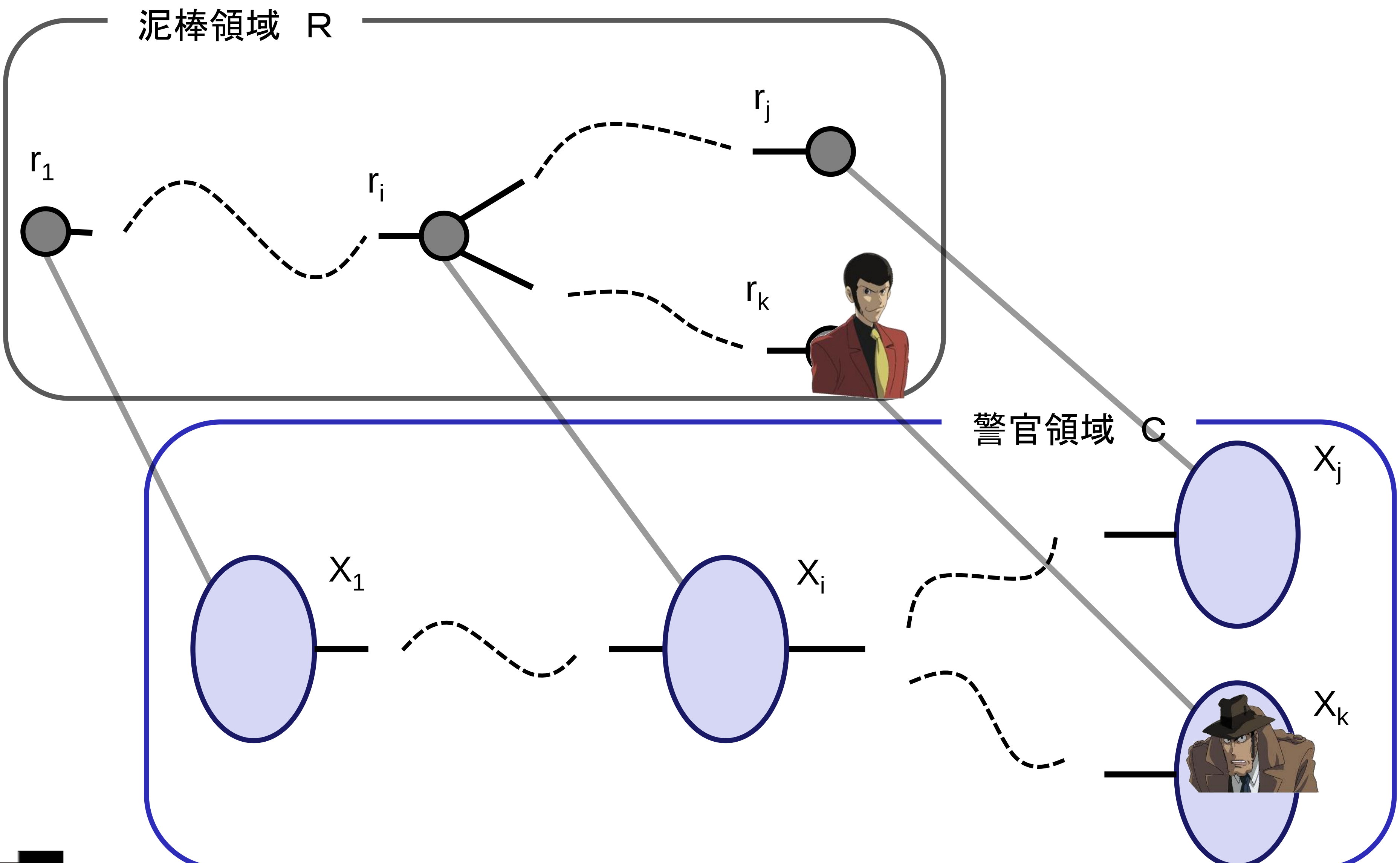
## 定義:点戦略(警官の戦略)

警官は現在の警官の状態によらず泥棒の状態のみで警官の次の状態が決まる戦略を**点戦略(point strategy)**と呼ぶ

# 任意の直接戦略に対する点勝利戦略



# 任意の直接戦略に対する点勝利戦略



この動きによって…

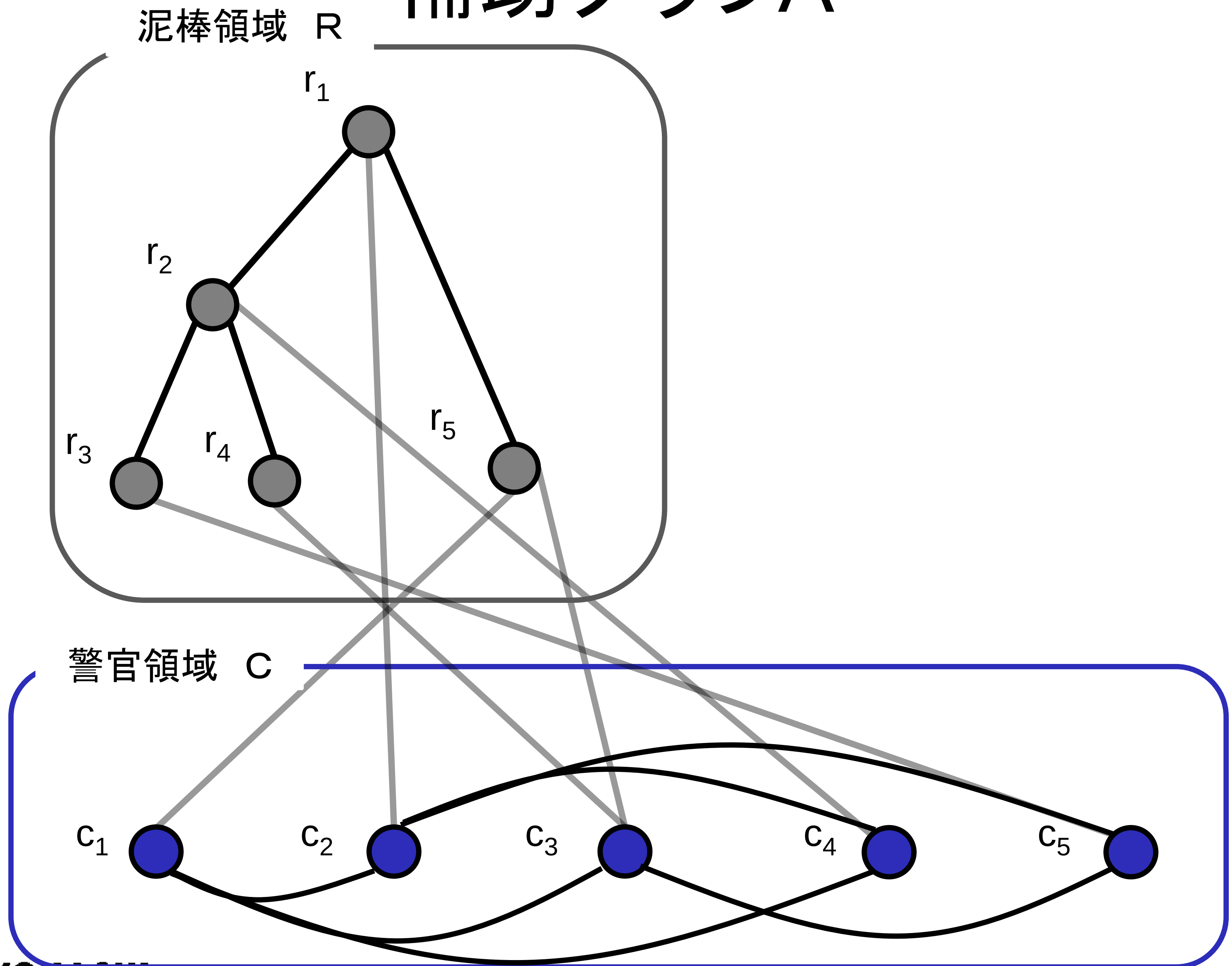
補題

護衛問題において、泥棒領域Rが木のとき、点勝利戦略に必要な警官の最小値は全ての勝利戦略に必要な警官の数よりも大きくなることはない

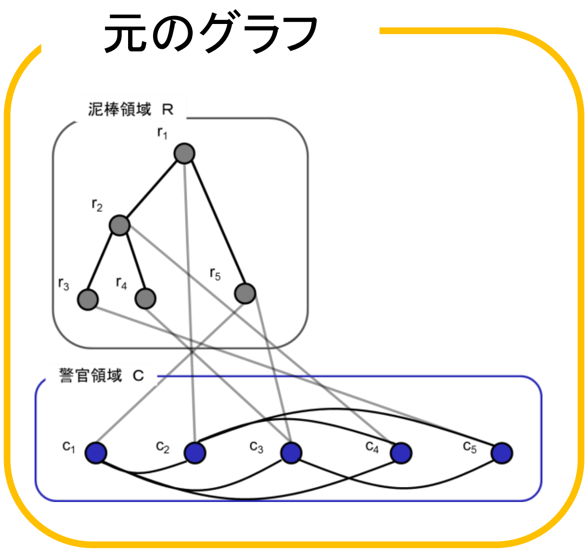
**点勝利戦略の警官の最小値**

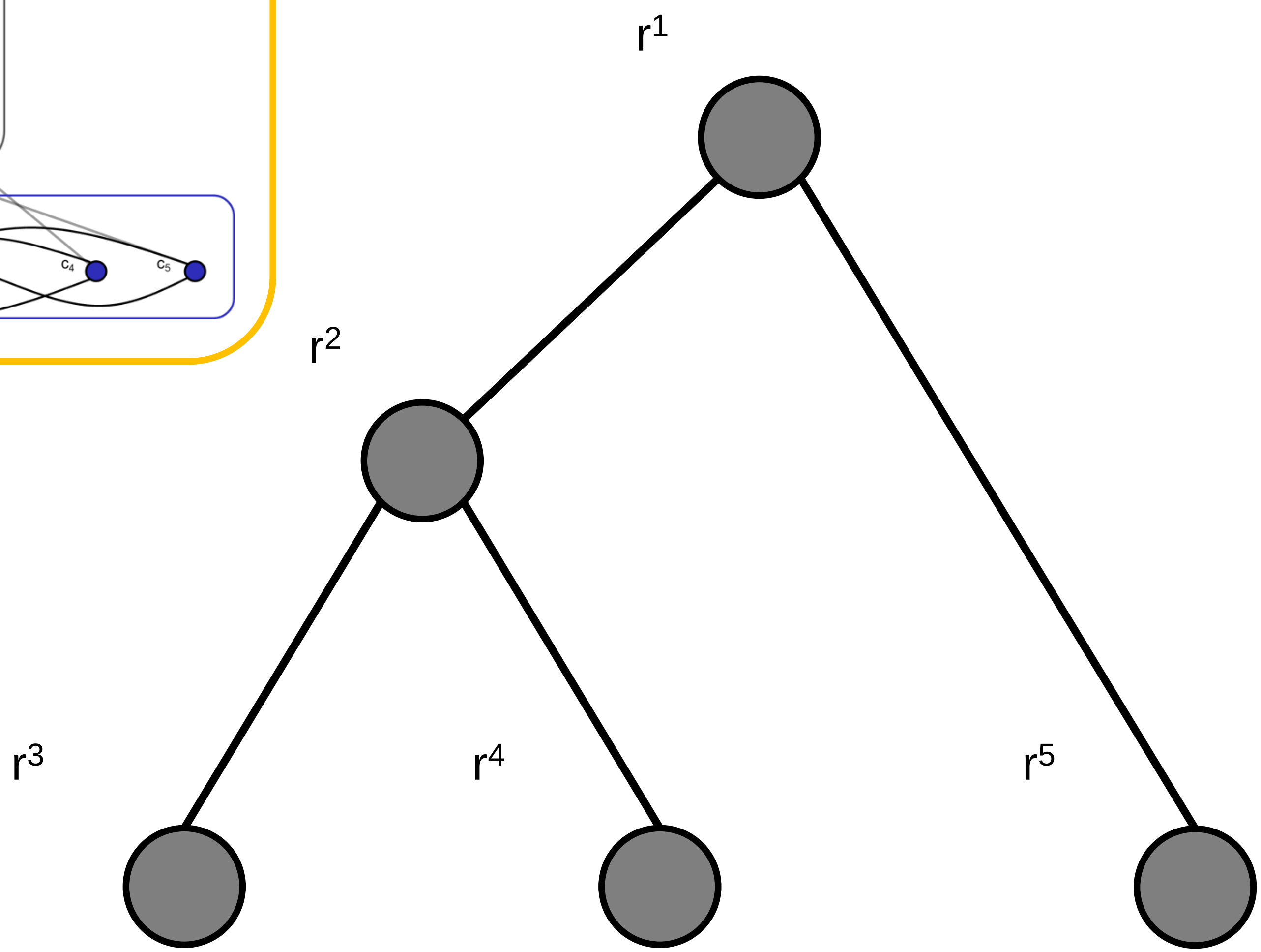
**≦勝利戦略の警官の最小値**

# 補助グラフA

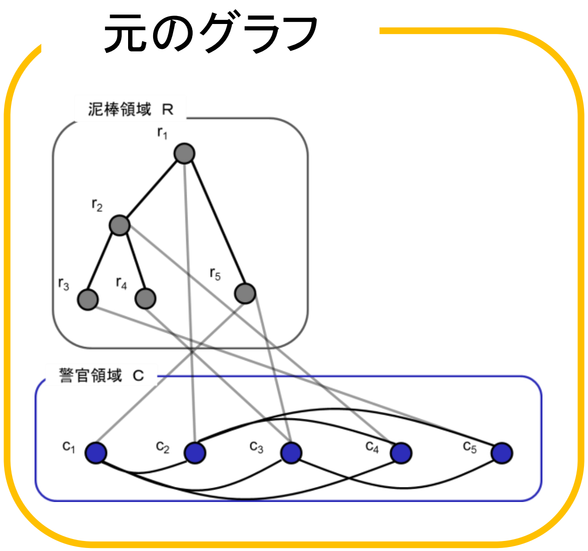


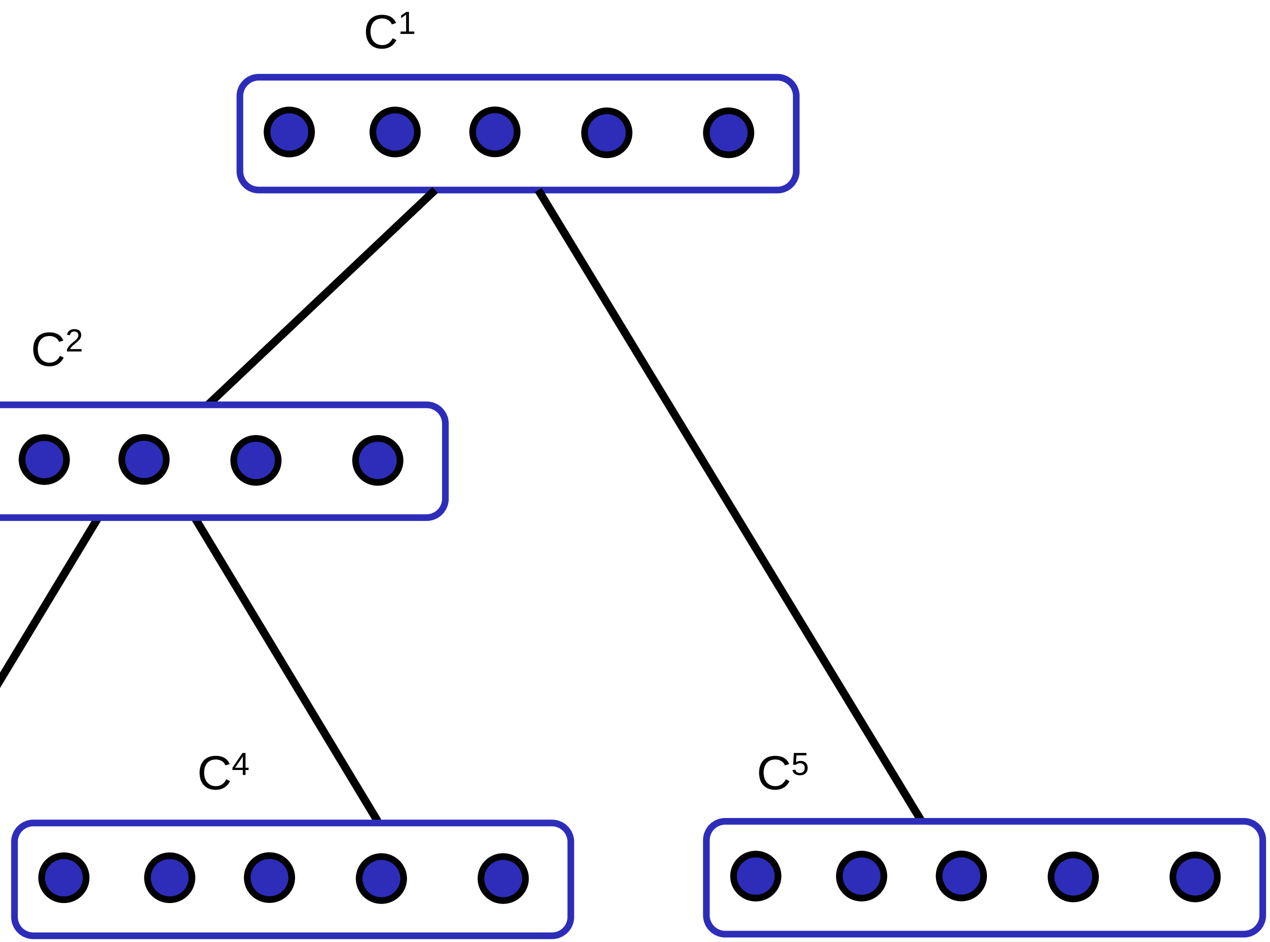
# 補助グラフA



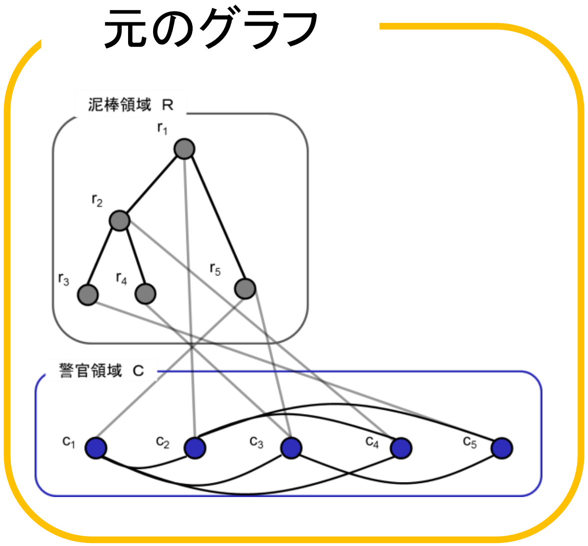



# 補助グラフA

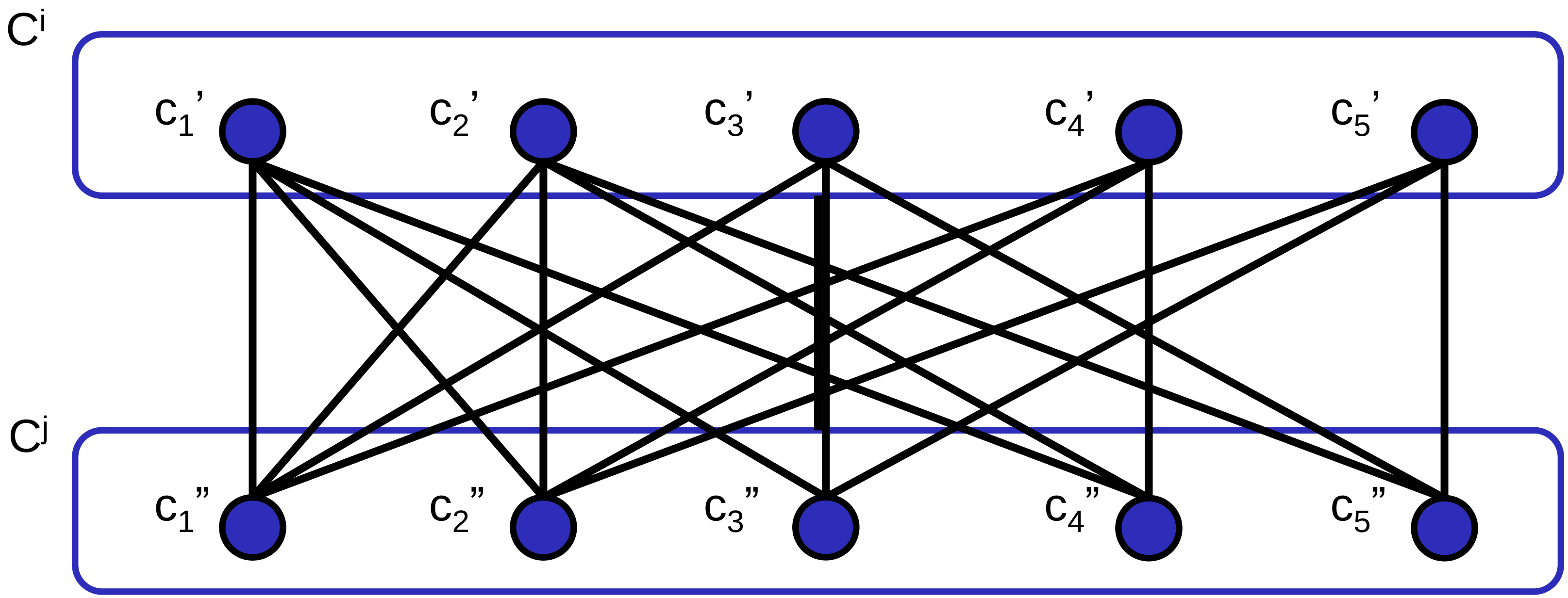


# 補助グラフA

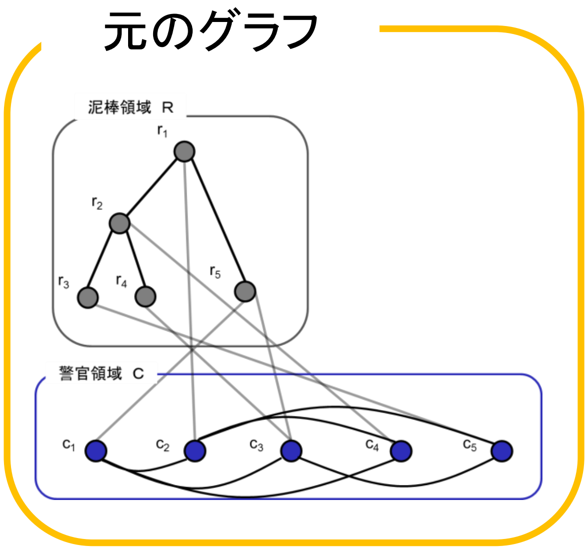


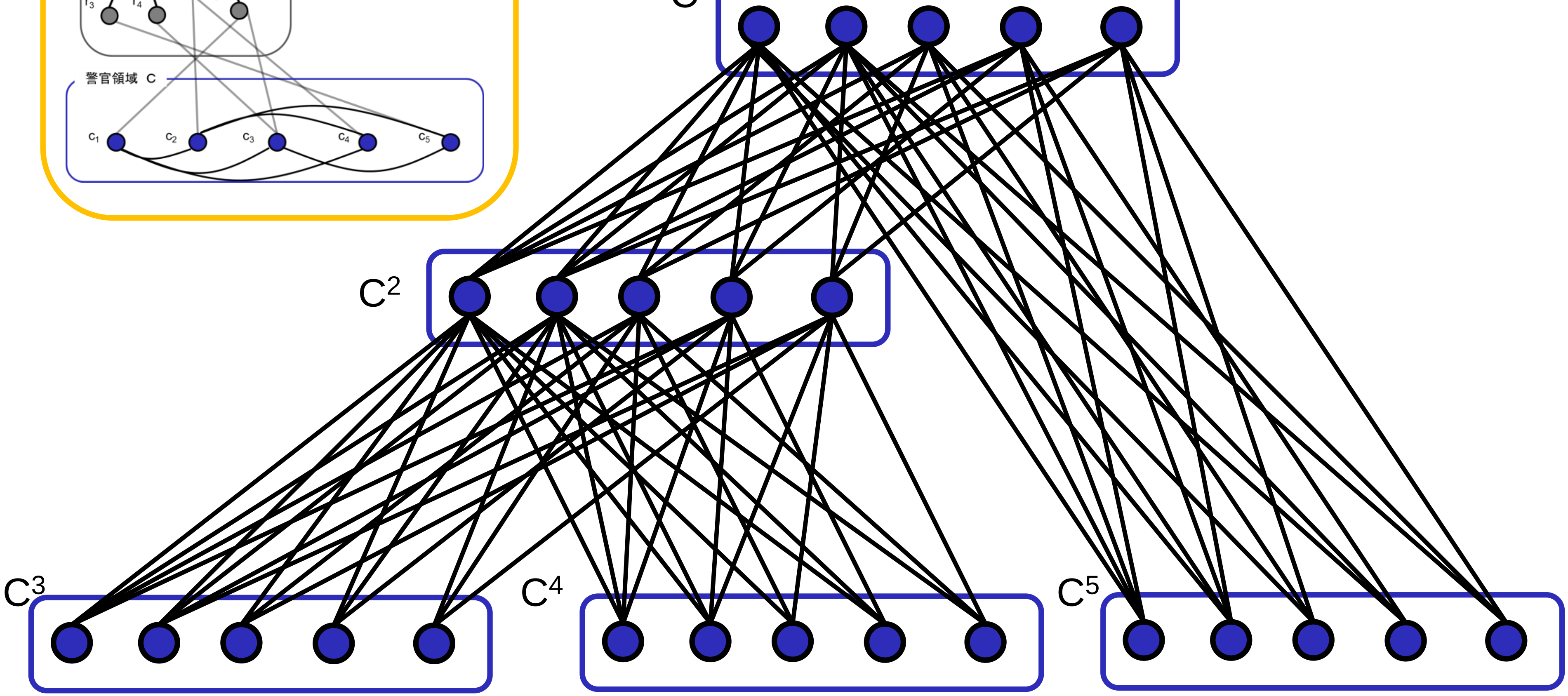
元のグラフ
泥棒領域 R
r1
r2
r3
r4
r5
警官領域 C
c1
c2
c3
c4
c5

Ci
Cj
c1'
c2'
c3'
c4'
c5'
c1"
c2"
c3"
c4"
c5"

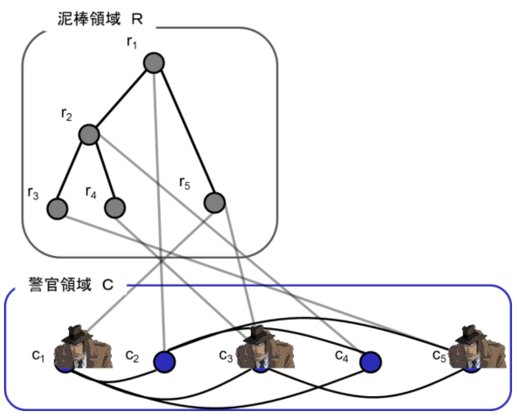
# 補助グラフA

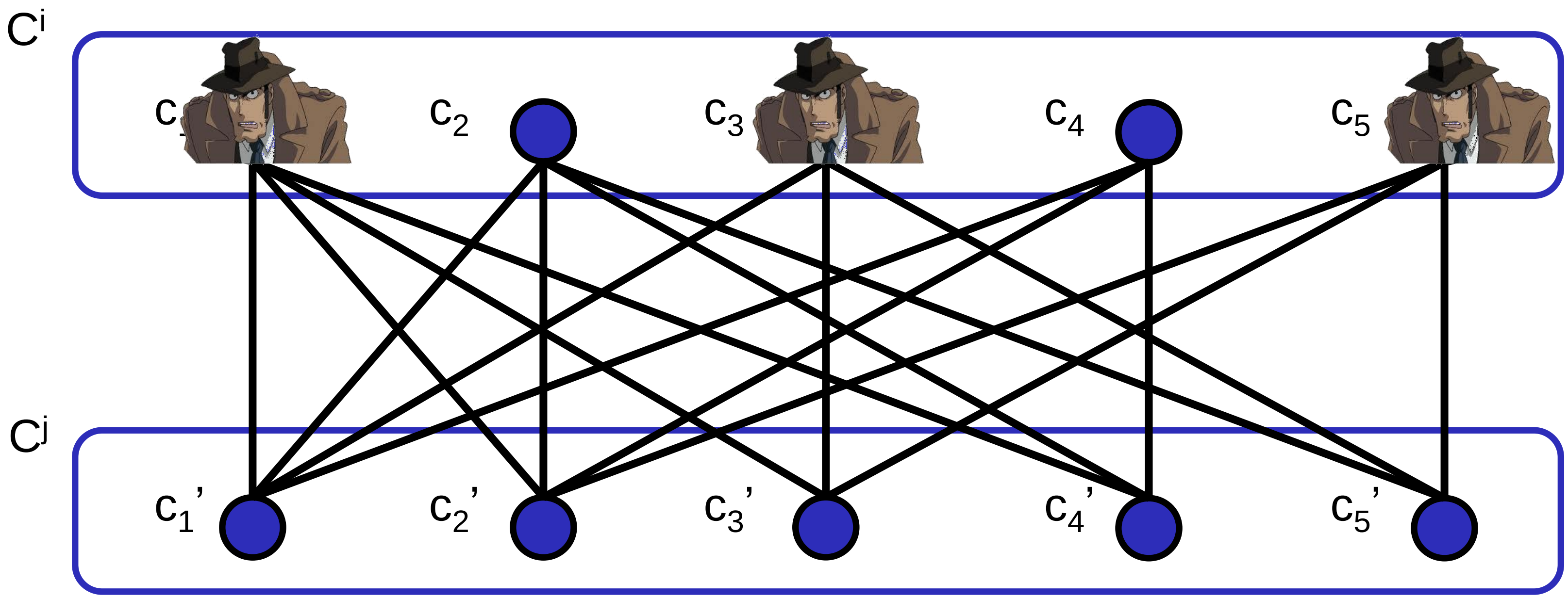


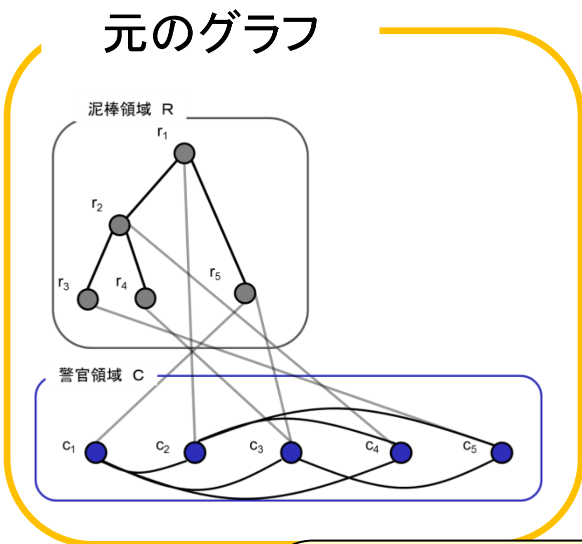
# 補助グラフA

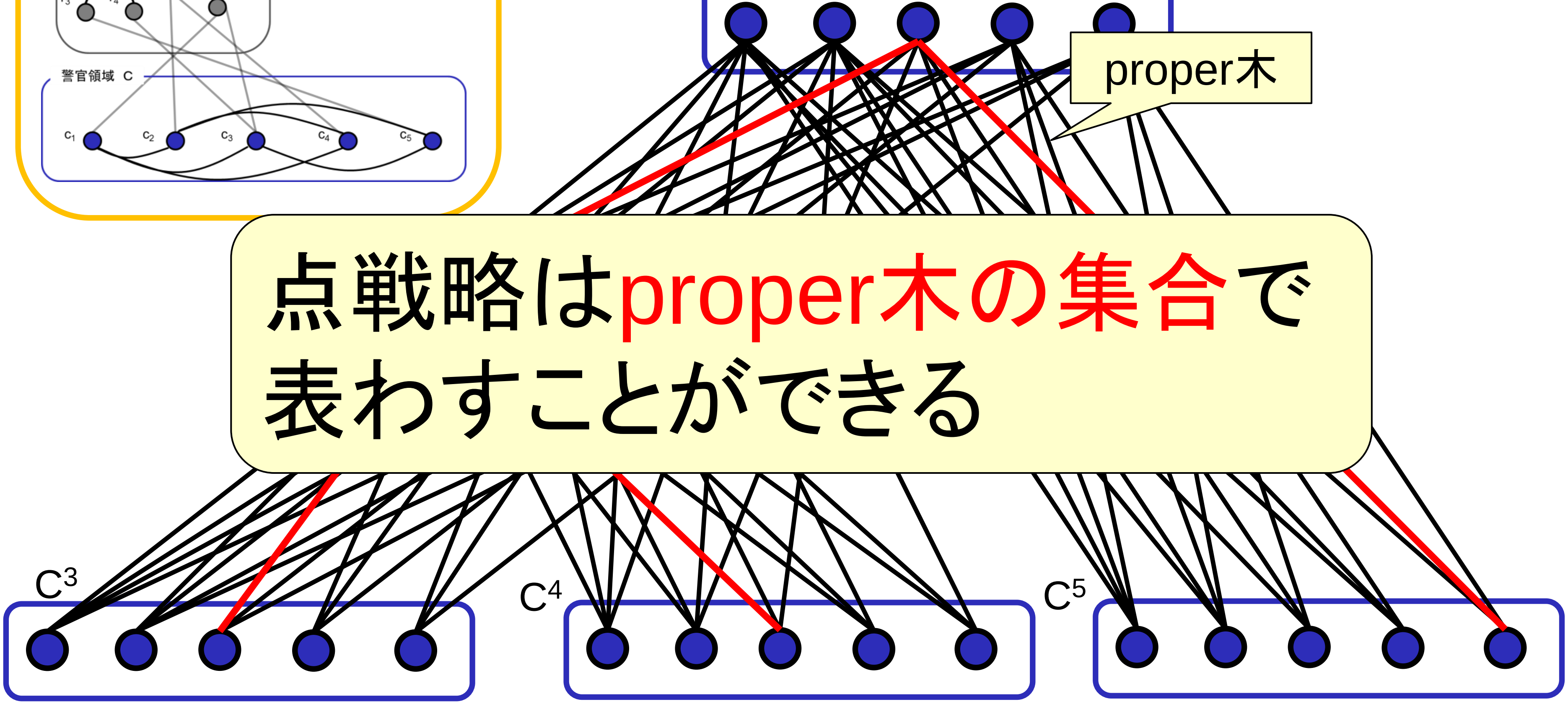
元のグラフ



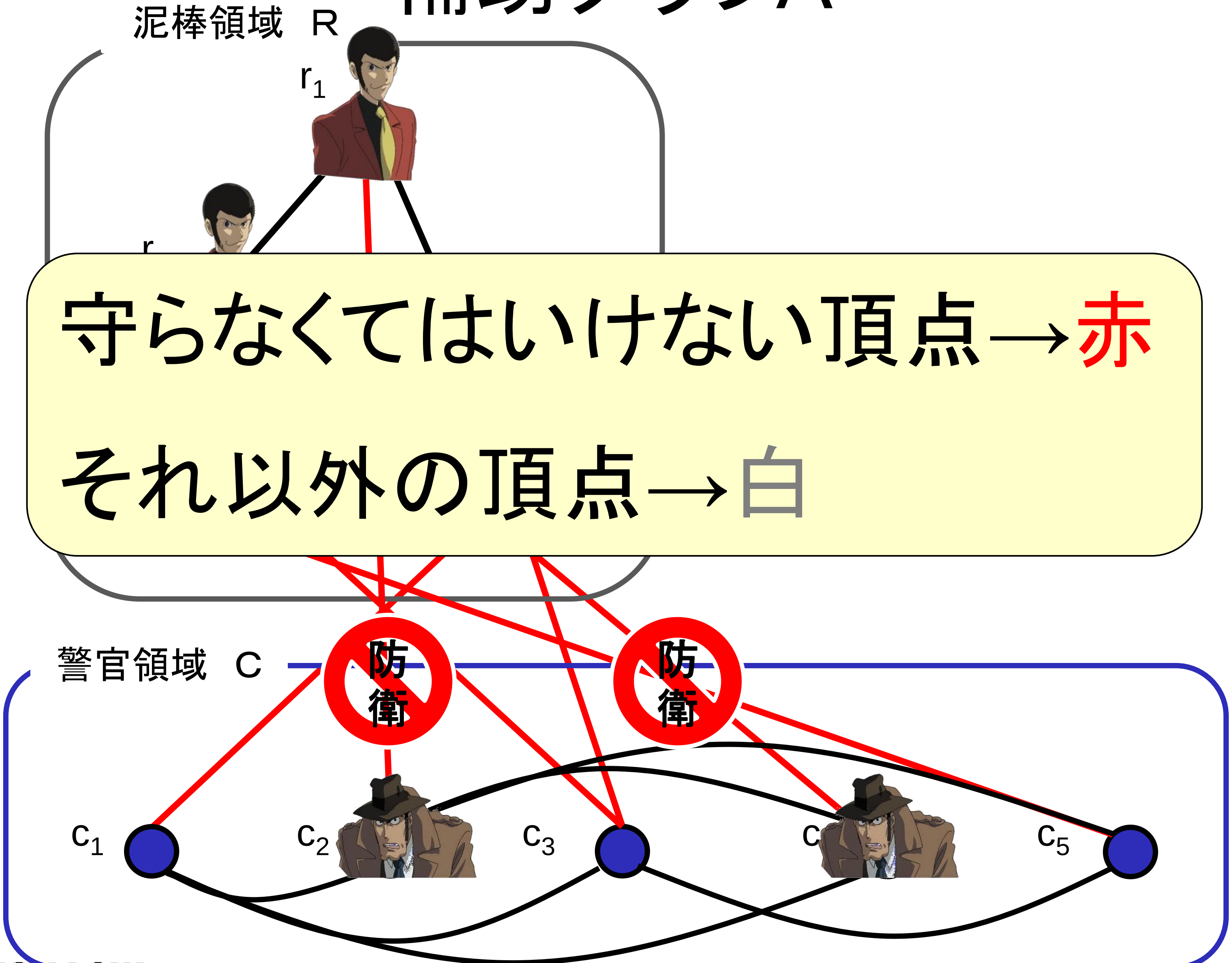
# 補助グラフA




点戦略はproper木の集合で表わすことができる

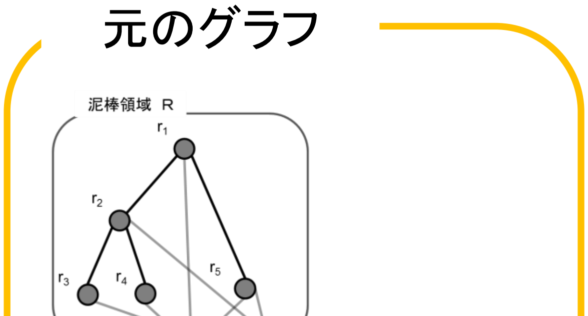
# 補助グラフA

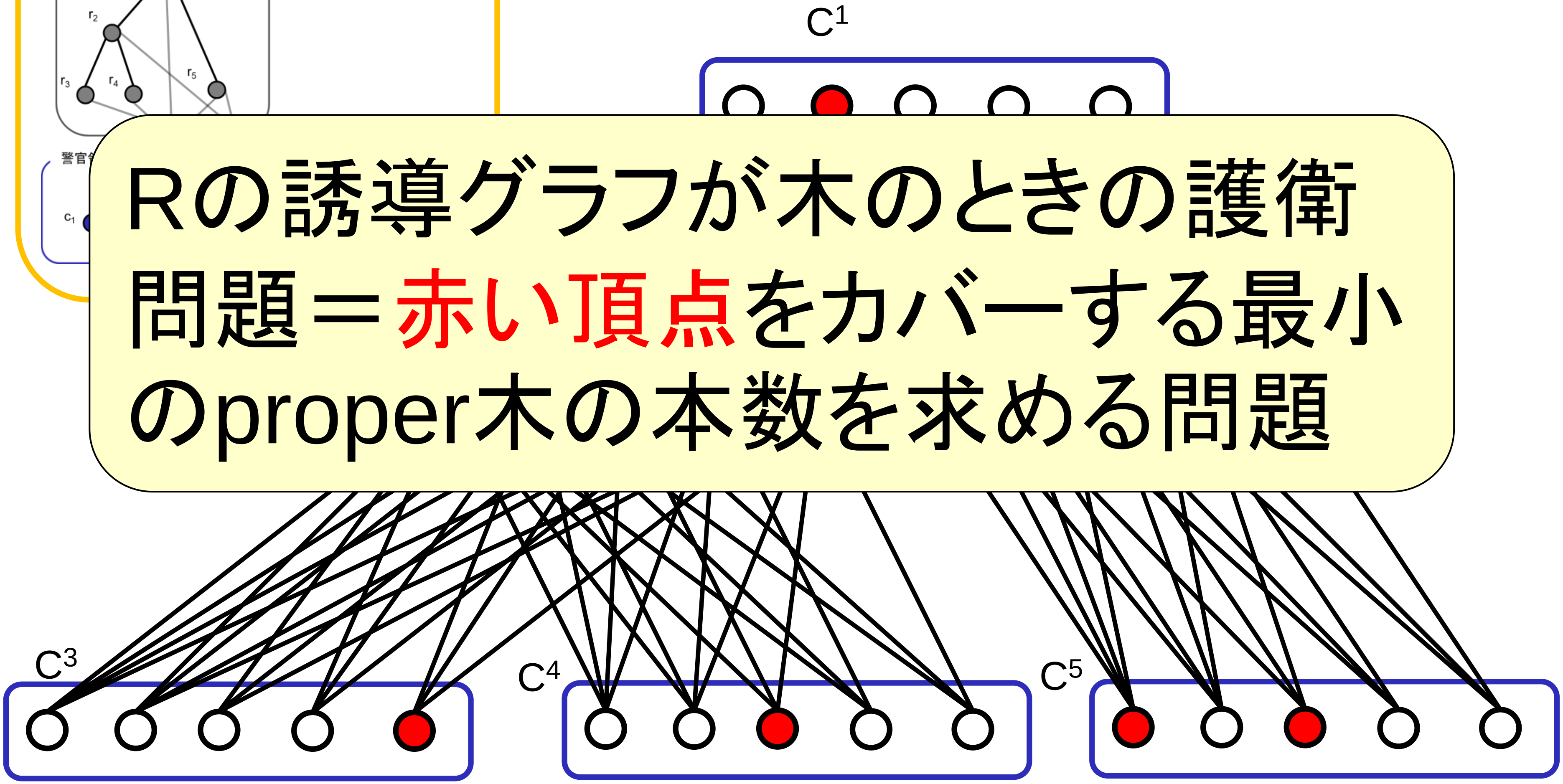



守らなくてはいけない頂点→赤

それ以外の頂点→白

# 補助グラフA




Rの誘導グラフが木のときの護衛問題＝赤い頂点をカバーする最小のproper木の本数を求める問題

# 集合被覆への帰着

Rの誘導グラフが木のときの
護衛問題

=

赤い頂点をカバーする最小の
proper木の本数を求める問題

帰着

集合族をproper木の集合

集合を赤い頂点とする

集合被覆問題

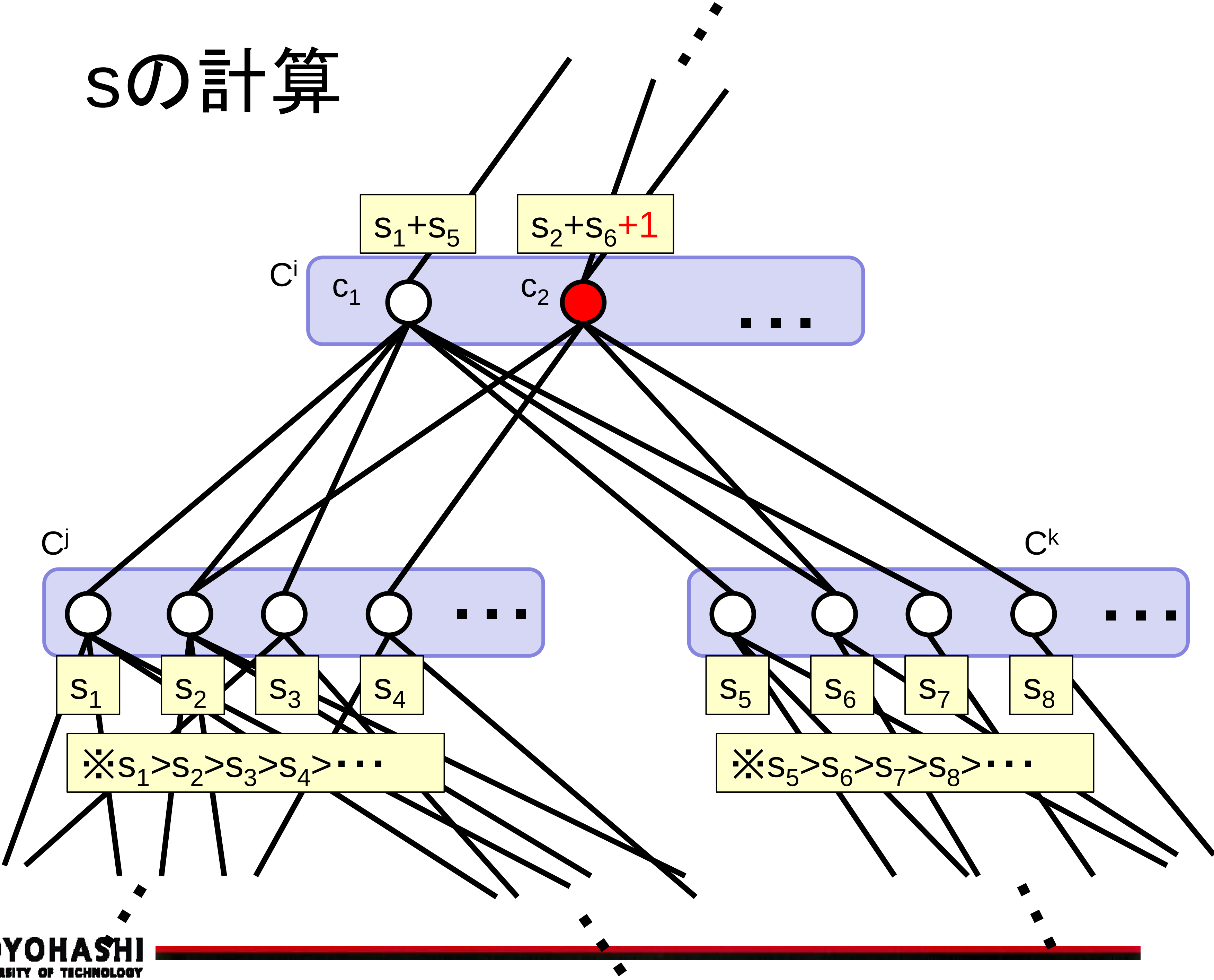
貪欲アルゴリズム

- 全ての考えられうるproper木の数は膨大
- よって最も赤い頂点を含むproper木を算出するアルゴリズムと貪欲アルゴリズムを組み合わせる

そのために準備として

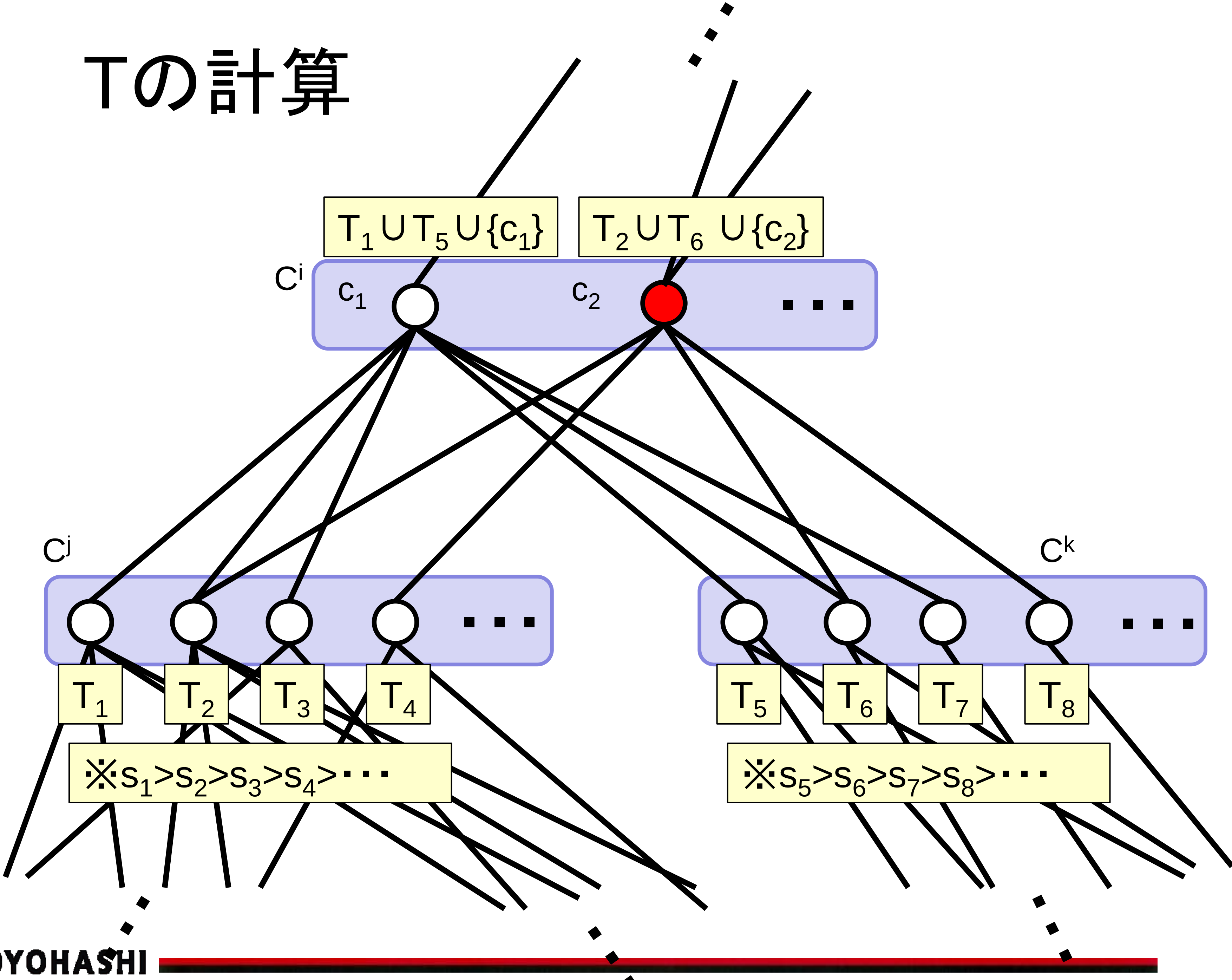
整数型のs、頂点集合を代入する型のTを各頂点に付加する

# sの計算



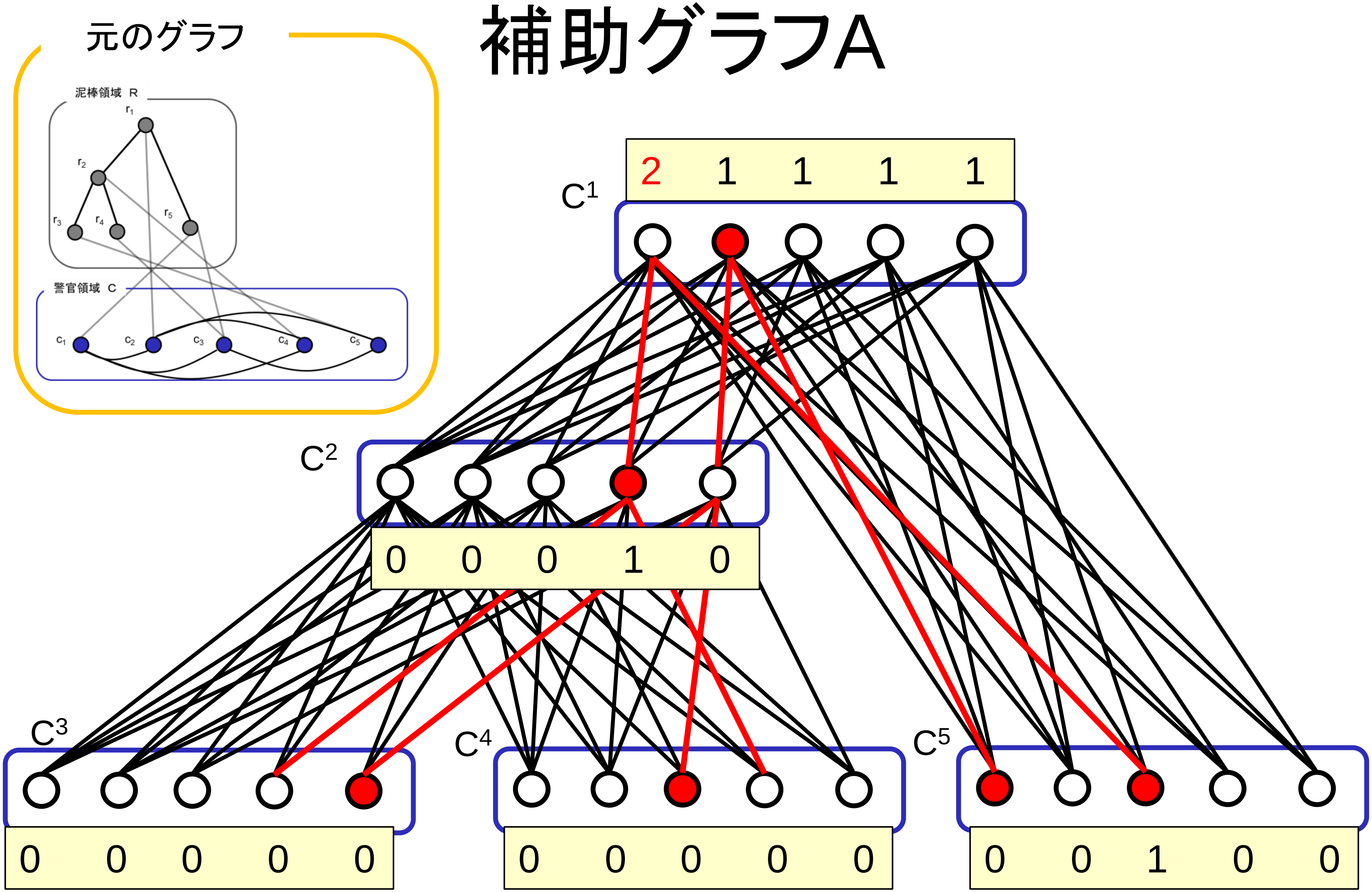
$s_1+s_5$
$s_2+s_6+1$
$C^i$
$c_1$
$c_2$
$C^j$
$C^k$
$s_1$
$s_2$
$s_3$
$s_4$
$s_5$
$s_6$
$s_7$
$s_8$
※$s_1>s_2>s_3>s_4>$・・・
※$s_5>s_6>s_7>s_8>$・・・

# Tの計算



$T_1 \cup T_5 \cup \{c_1\}$
$T_2 \cup T_6 \cup \{c_2\}$
$C^i$
$c_1$
$c_2$
$C^j$
$C^k$
$T_1$
$T_2$
$T_3$
$T_4$
$T_5$
$T_6$
$T_7$
$T_8$
※$s_1 > s_2 > s_3 > s_4 > \cdots$
※$s_5 > s_6 > s_7 > s_8 > \cdots$

# 補助グラフA



元のグラフ
泥棒領域 R
r1
r2
r3
r4
r5
警官領域 C
c1
c2
c3
c4
c5
2 1 1 1 1
C1
C2
0 0 0 1 0
C3
C4
C5
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 1 0 0

# 近似比率

集合被覆問題での貪欲法が保証する近似比率はH($s_{max}$)なので（$s_{max}$=部分集合の最大サイズ）

## 定理

護衛問題はRの誘導グラフが木のとき,集合被覆問題に帰着し貪欲アルゴリズムで計算することによって

$$H(|R|) \leq \log|R| + 1$$

の近似比率で近似できる

# 計算時間

一本のproper木ごとに・・・

初期化:

$$O(|R||C|)$$

その他の計算:

$$O\left(\sum_{(r_i, r_j) \in E(T)} |E^{ij}|\right) = O(|R|(|C| + |E(G[C])|))$$

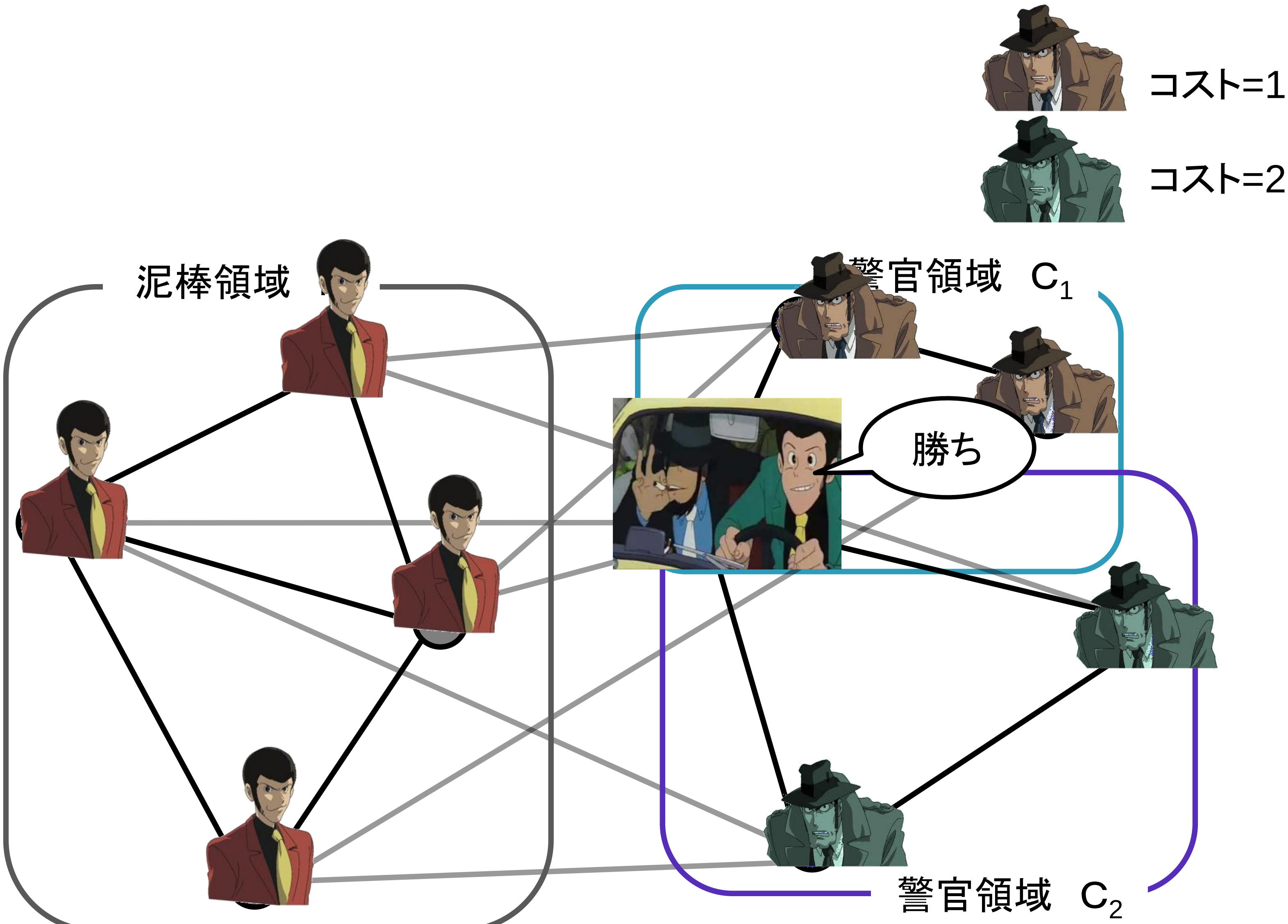
最悪の場合・・・

アルゴリズムの総時間:

$$O(|R|^2 |C|(|C| + |E(G[C])|))$$

TOYOHASHI
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

# コスト付き護衛ゲーム



# コスト付き護衛問題

## 問題

任意のグラフG=(V,E)と、種類ごとの警官領域$C_1, C_2, \ldots, C_m$と泥棒領域Rが与えられ、護衛ゲームをしたときの泥棒から警官領域を必ず守りきることのできる最小のコストを求める問題

# コスト付き護衛問題　定式化

問題:コスト付き護衛問題

入力: 任意のグラフ G=(V,E)
警官領域 $C_1,C_2,\ldots,C_m$
各種類の警官一人分のコスト $x_1,x_2,\ldots,x_m$

出力: 各種類ごとの警官の人数 $nc_1,nc_2,\ldots,nc_m$

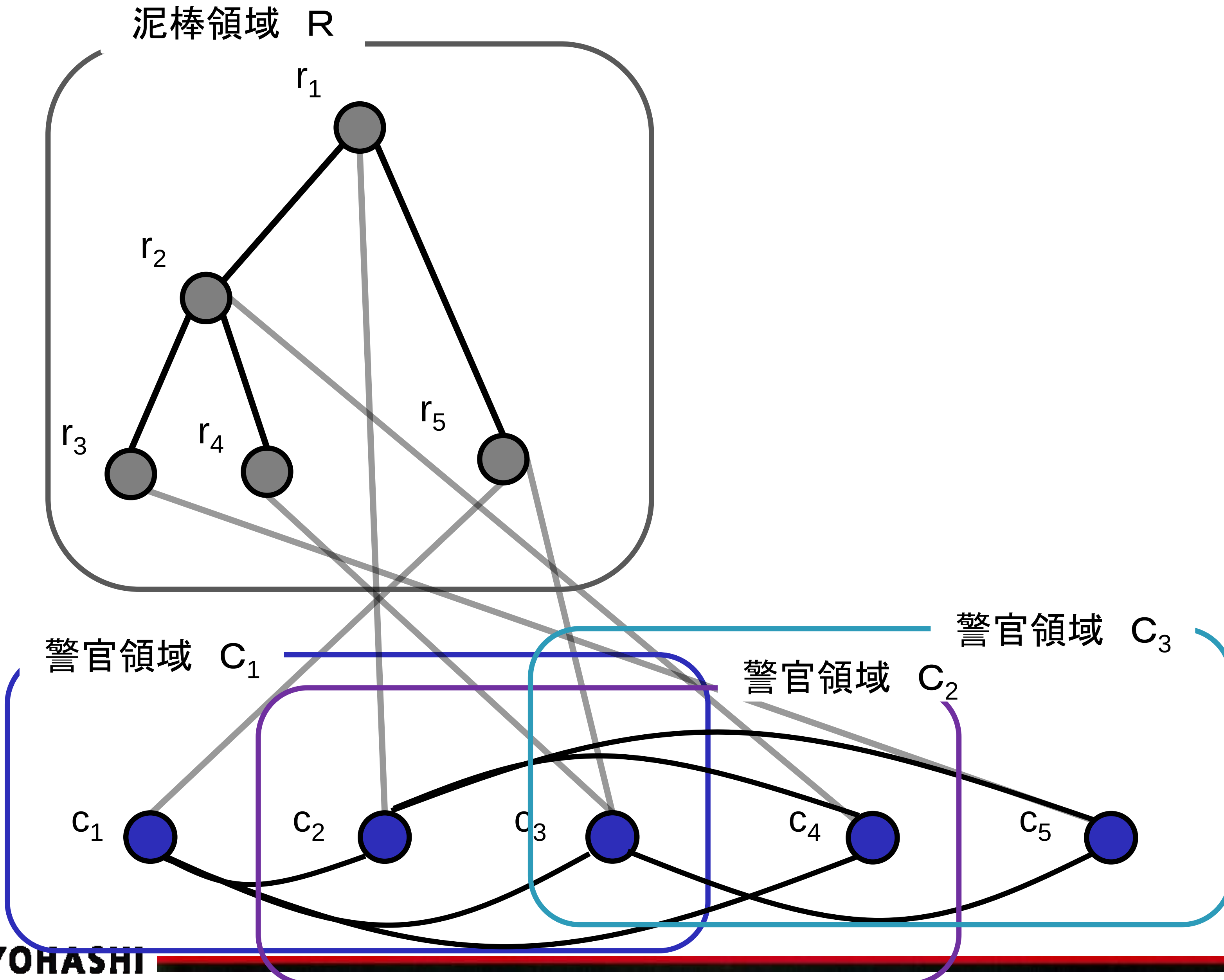
実行可能解: 警官勝利戦略が存在する各種類ごとの警官の数

目的: $\Sigma_{i=1\sim m} nc_i x_i$ を最小にする

補題

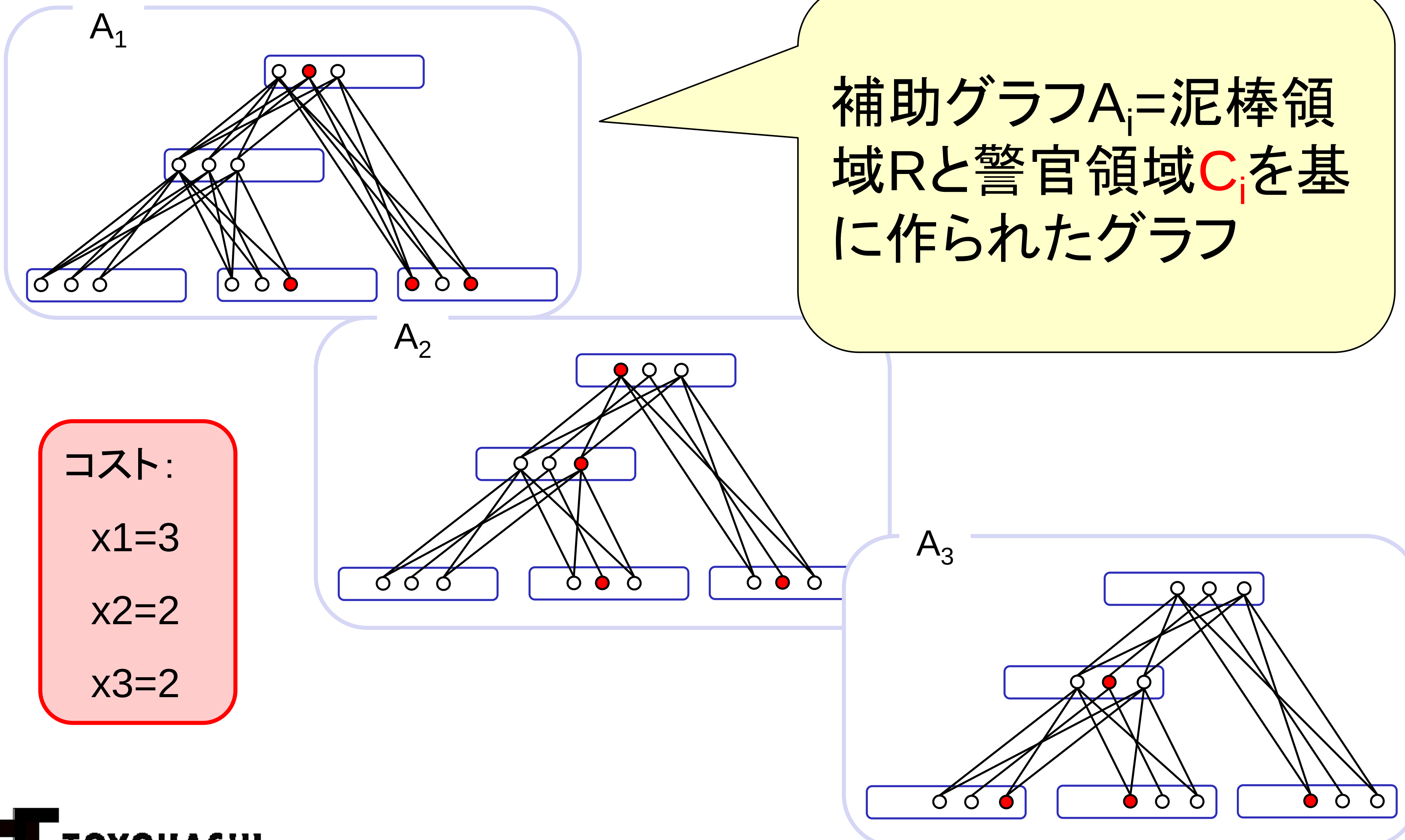
　コスト付き護衛問題において、泥棒領域Rが木のとき、点勝利戦略の最小のコストは全ての勝利戦略の最小のコストよりも大きくなることはない

・・・同様に成り立つ



泥棒領域 R
r1
r2
r3
r4
r5
警官領域 C1
警官領域 C2
警官領域 C3
c1
c2
c3
c4
c5

# 補助グラフ$A_1, A_2, \cdots, A_m$




補助グラフ$A_i$=泥棒領域Rと警官領域$C_i$を基に作られたグラフ

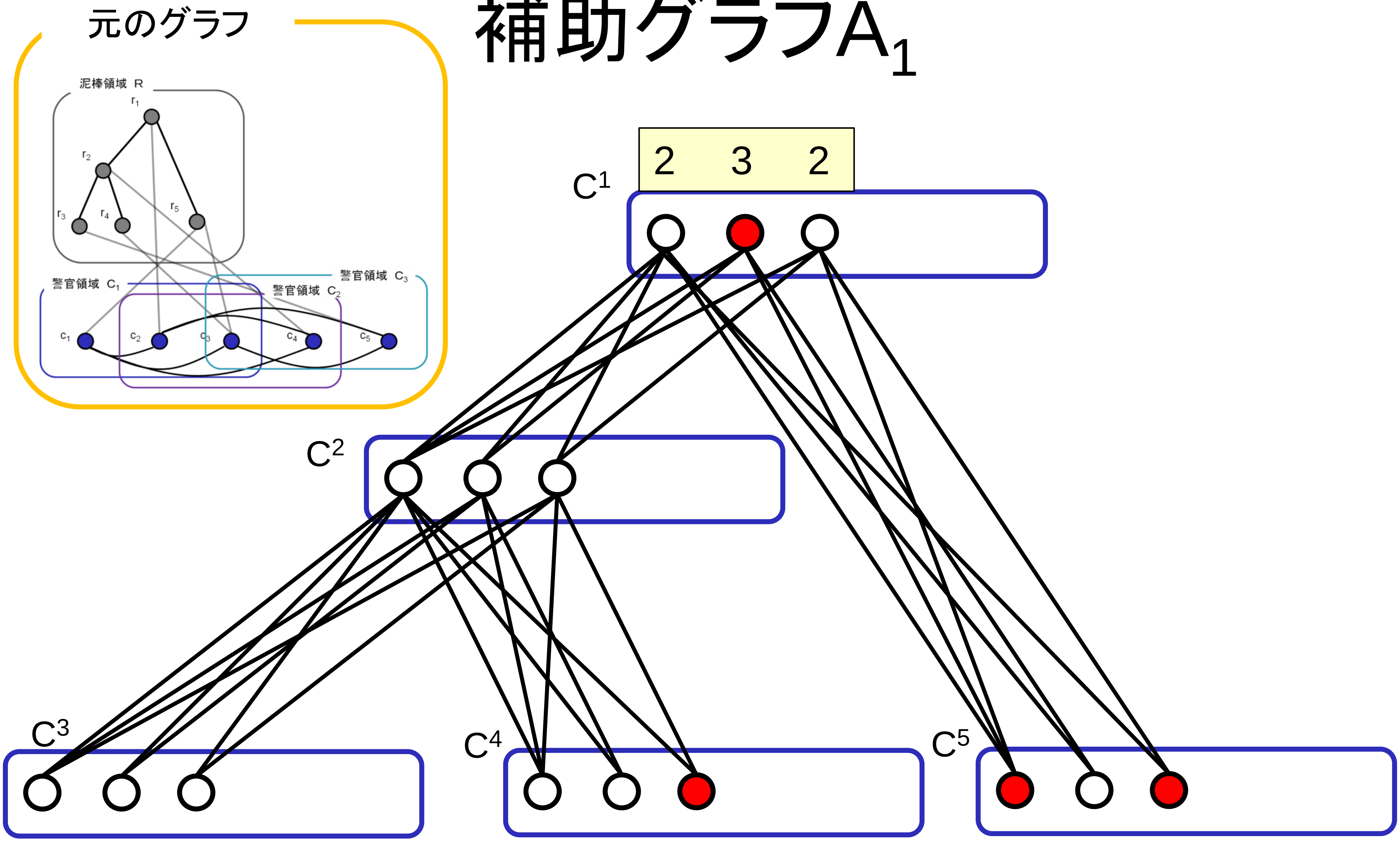
コスト:

x1=3

x2=2

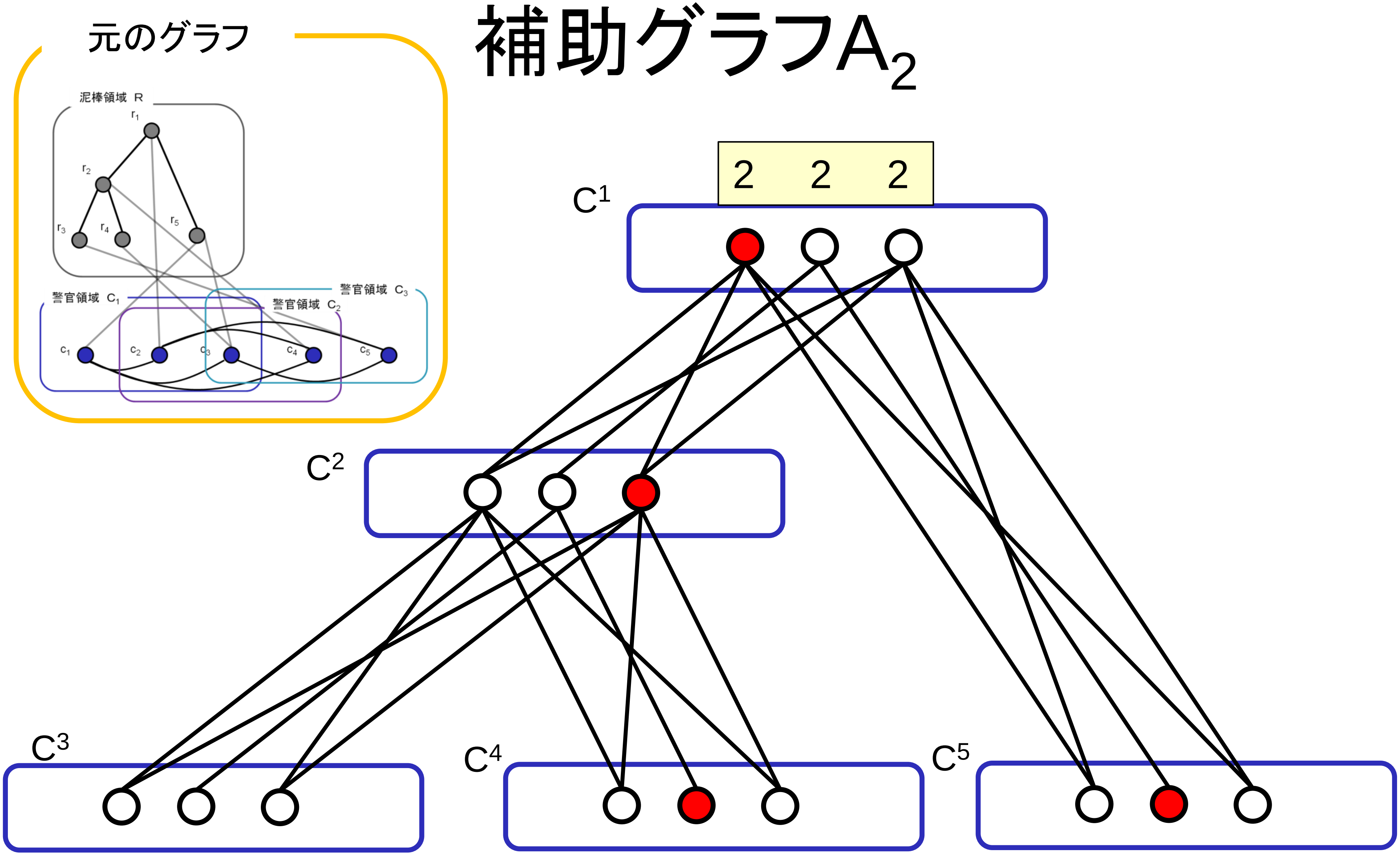
x3=2

# 補助グラフ$A_1$



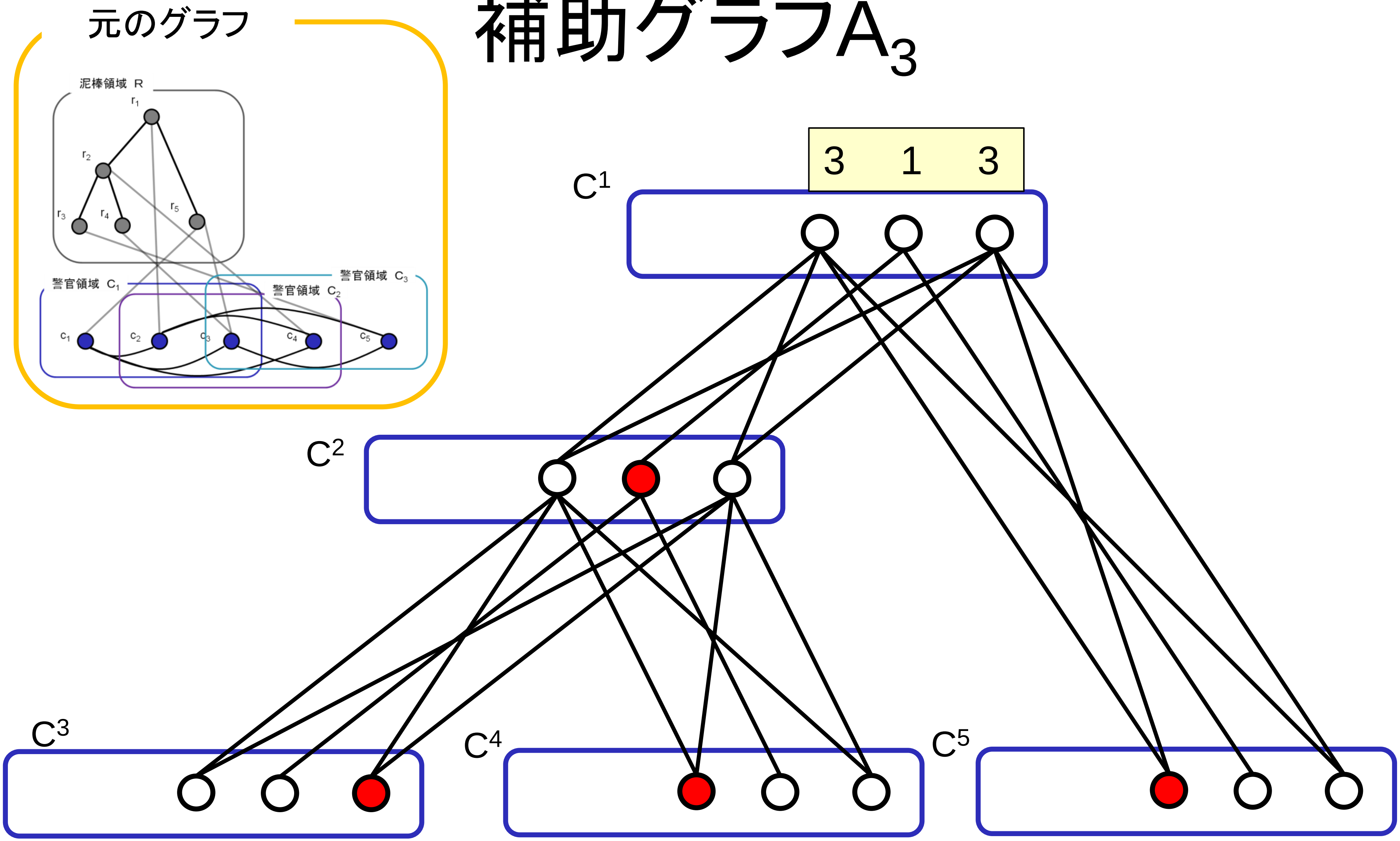

警官一人のコスト : $x_1$=3

# 補助グラフ$A_2$



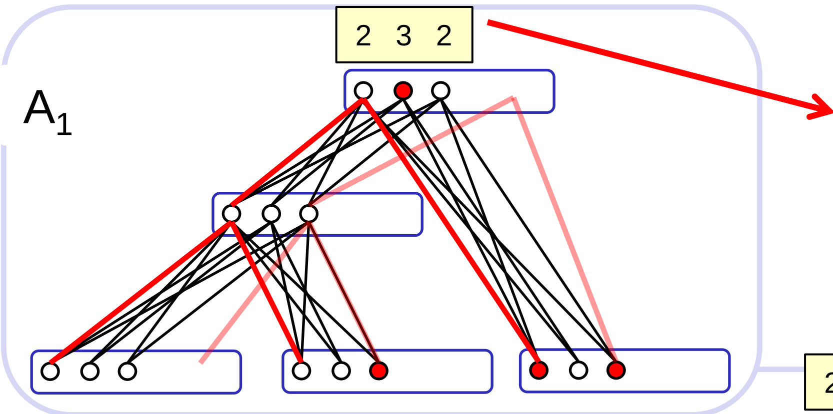

警官一人のコスト：$x_2$=2

# 補助グラフ$A_3$




警官一人のコスト:$x_3$=2

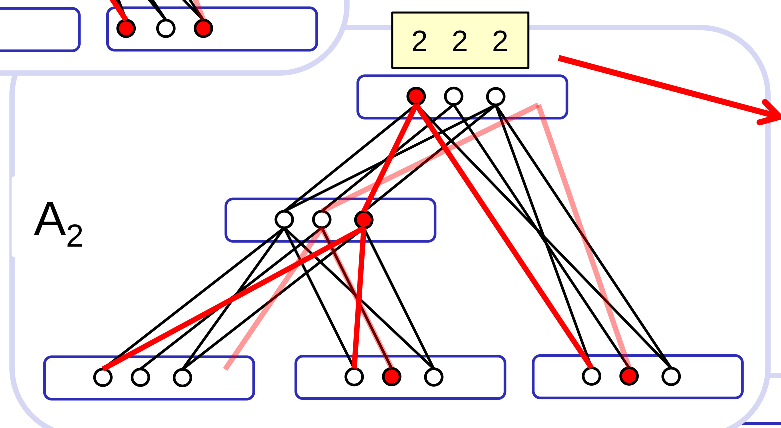
# 補助グラフ$A_1, A_2, \cdots, A_m$




$2/x_1=0.66$

$3/x_1=1$

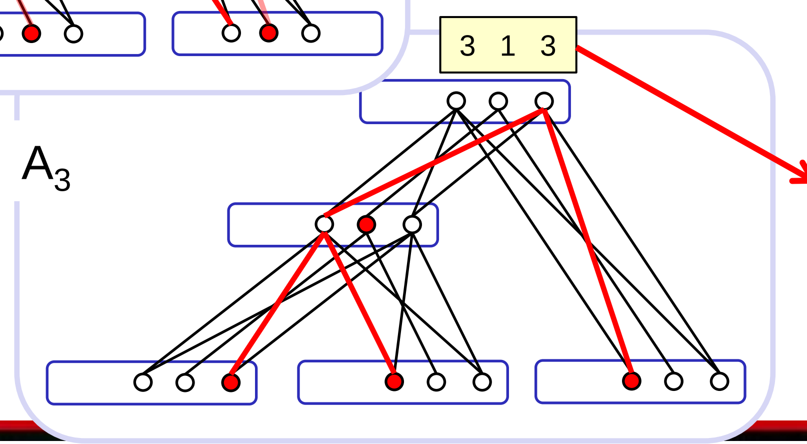
$2/x_1=0.66$




$2/x_2=1$

$2/x_2=1$

$2/x_2=1$




$3/x_3=1.5$

$1/x_3=0.5$

$3/x_3=1.5$

コスト:

x1=3

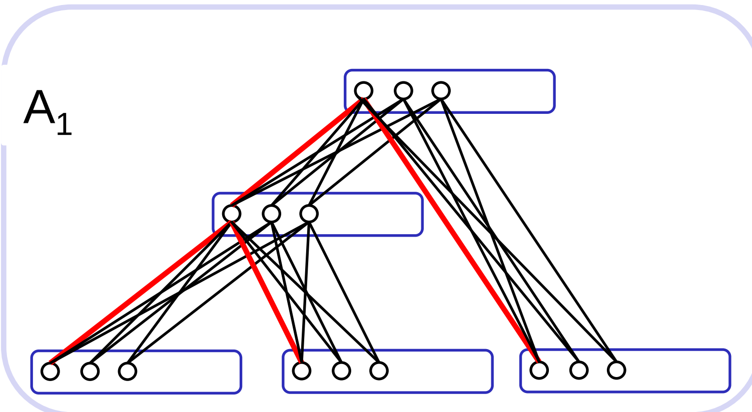
x2=2

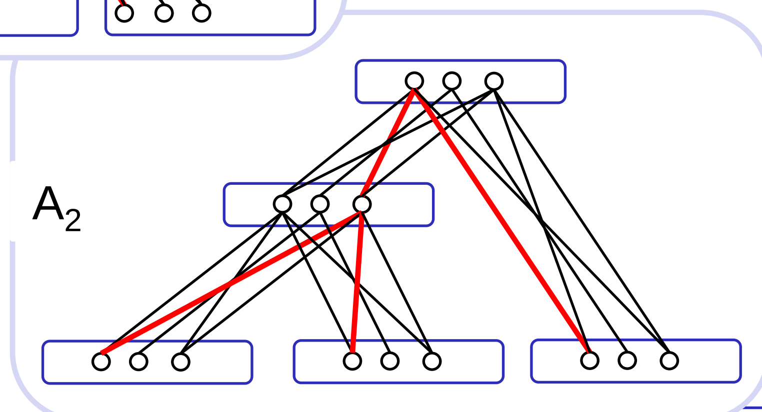
x3=2

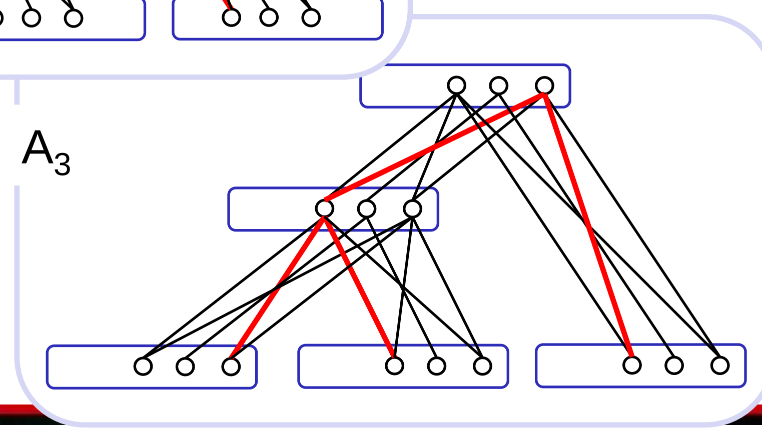
# 補助グラフ$A_1, A_2, \cdots, A_m$

総コスト：

$x_1+x_2+x_3=7$




コスト：

x1=3

x2=2

x3=2

# 近似比率

コスト付き集合被覆問題での貪欲法が保証する近似比率も$H(s_{max})$なので

（$s_{max}$=部分集合の最大サイズ）

## 定理

コスト付き護衛問題はRの誘導グラフが木のとき,集合被覆問題に帰着し貪欲アルゴリズムで計算することによって

$$H(|R|) \leq \log|R| + 1$$

の近似比率で近似できる

# まとめ

泥棒領域Rが木の時の護衛問題とコスト付き護衛問題が $H(|R|) \leq \log|R| + 1$ 倍近似できることを示した。

# 今後の課題

より一般的なグラフに対する
　高性能近似アルゴリズムを設計する